ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и варианты заданий к контрольной работе для студентов специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» заочной формы обучения

Могилев 2009

УДК 519.21
ББК 22.171
Т 26

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «28» января 2009 г., протокол № 5

Составители: В. Г. Замураев;
Т. Ю. Орлова;
С. Ф. Плешкунова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Л. В. Плетнёв

Методические указания предназначены для самостоятельной подготовки студентов специальности 1–53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» заочной формы обучения.

Учебное издание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Ответственный за выпуск Л. В. Плетнёв

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать 4.06.2009. Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1.4. Уч.-изд. л. 1.4. Тираж 99 экз. Заказ № 423.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ №02330/375 от 29.06.2004 г.
212000, г. Могилев, пр. Мира, 43

Содержание

1 Программа курса ……………………………………………………4
2 Общие требования к оформлению контрольной работы ……...…4
2.1 Выбор варианта заданий …………………………………………4
2.2 Правила оформления контрольной работы ……..…………….....4
3 Решение типового варианта ……………………………………..5
4 Варианты контрольных заданий …………………………………13
Список литературы …………………………………………………22

1 Программа курса

Тема 1. Вероятность события.

Основные комбинаторные формулы. Вероятность события. Классическое и геометрическое определения вероятности. Теорема сложения. Условная вероятность. Теорема умножения. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема Бернулли.

Тема 2. Случайные величины.

Случайная величина и её функция распределения. Дискретные и непрерывные случайные величины. Числовые характеристики случайных величин. Основные законы распределения.

Тема 3. Многомерные случайные величины. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

Многомерные случайные величины. Законы распределения двумерных величин. Ковариация и коэффициент корреляции. Условное математическое ожидание. Регрессия. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

Тема 4. Элементы математической статистики.

Случайная выборка и её характеристики. Статистические ряды. Полигон и гистограмма. Точечное и интервальное оценивание. Статистическая проверка гипотез.

2 Общие требования к оформлению контрольной работы

2.1 Выбор варианта заданий

Номер варианта заданий равен последней цифре номера зачётной книжки. Если же последняя цифра – ноль, то следует выполнять задания варианта номер 10.

2.2 Правила оформления контрольной работы

Работа оформляется в отдельной тонкой тетради в обычную клетку.

На обложке тетради указываются название дисциплины; номер группы и название факультета; фамилия, имя, отчество, номер зачётной книжки; обратный адрес; номер варианта заданий.

Решения заданий приводятся в порядке, установленном в вариантах заданий.

Перед каждым решением указывается номер задания и его полное условие.

Решения приводятся с необходимыми краткими пояснениями, записываются крупным и разборчивым почерком. Чертежи выполняются простым карандашом.

Оформление каждого задания начинается с новой страницы.

В конце работы приводится список литературы, использованной при решении заданий.

Незачтённые работы не оформляются заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводятся в конце работы.

При несоблюдении хотя бы одного из указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированную и зачтённую контрольную работу вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтённой контрольной работы студент не допускается к сдаче экзамена.

3 Решение типового варианта

Задание 1

В коробке пять золотых и семь серебряных шаров. Из коробки наугад вынимают три шара. Найти вероятность того, что два вынутых шара – золотые, а один – серебряный.

Решение

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь три шара из двенадцати, т. е. числу сочетаний из 12 элементов по 3:

$$C_{12}^{3}=\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{12!}{3!9!}=\frac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3}=220.$$

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию A – среди трёх взятых шаров два золотых и один – серебряный: два золотых шара можно взять из пяти золотых шаров C_5^2 способами; взять же один серебряный шар из семи серебряных шаров можно семью способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_5^2\cdot 7$:

$$C_5^2\cdot 7=\frac{5!}{2!3!}\cdot 7=\frac{4\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 2}=70.$$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A)=\frac{C_5^2\cdot C_7^1}{C_{12}^3}=\frac{70}{220}=\frac{7}{22}.$$

Ответ: $\frac{7}{22}$.

Задание 2

Обследовалась группа из 10000 человек в возрасте свыше 60 лет. Оказалось, что 4000 человек являются постоянно курящими. У 1800 из курящих обнаружились серьёзные изменения в лёгких. Среди некурящих изменения в лёгких имело 1500 человек. Являются ли курение и наличие изменений в лёгких независимыми событиями?

Решение

Обозначим через A событие, состоящее в том, что у обследуемого имеются серьёзные изменения в лёгких. Можно сделать два предположения: обследуемый постоянно курит (гипотеза H_1) или обследуемый не курит (гипотеза H_2).

Вероятность события A найдём по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2).$$

По условию задачи имеем: $P(H_1)=\frac{4000}{10000}=0,4$; $P(H_2)=\frac{6000}{10000}=0,6$; $P(A|H_1)=\frac{1800}{4000}=0,45$ (вероятность того, что у постоянно курящего имеются изменения в лёгких); $P(A|H_2)=\frac{1500}{6000}=0,25$ (вероятность того, что у некурящего имеются изменения в лёгких).

Искомая вероятность $P(A)=0,4\cdot 0,45+0,6\cdot 0,25=0,18+0,15=0,33$.

Так как $P(A|H_1)>P(A)$, то между курением и наличием серьёзных изменений в лёгких имеется зависимость.

Ответ: события зависимы.

Задание 3

Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0,1]$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=X^2$.

Решение

Так как случайная величина Y неотрицательна, то при $y\le 0$ её функция распределения $F_Y(y)=P(Y<y)=0$.

При $y > 0$ имеем

$$F_Y(y) = P\left(X^2 < y\right) = P\left(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\right) = F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right),$$

где $F_X(x)$ – функция распределения вероятностей случайной величины X .

Для равномерно распределённой случайной величины X

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ x, \ 0 < x \le 1; \\ 1, \ x > 1. \end{cases}$$

Следовательно, при $y > 0$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, \ y \le 1; \\ 1, \ y > 1. \end{cases}$$

Плотность распределения вероятностей случайной величины Y

$$f_Y(y) = F_Y{}'(y) = \begin{cases} 0, \ y < 0 \text{ или } y > 1; \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, \ 0 < y < 1. \end{cases}$$

Ответ: $f_Y(y) = \begin{cases} 0, \ y < 0 \text{ или } y > 1; \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, \ 0 < y < 1. \end{cases}$

Задание 4

Записать закон совместного распределения вероятностей и найти коэффициент корреляции числа выпадений герба и числа выпадений цифры при одновременном подбрасывании трёх монет.

Решение

Обозначим рассматриваемые случайные величины – число выпадений герба и число выпадений цифры – через X и Y соответственно. Закон совместного распределения величин X и Y имеет вид (таблица 1).

Вероятности $p_{i+1,4-i}$, $i = \overline{0,3}$, найдены по формуле Бернулли

$$p_{i+1,4-i} = P\left(X = i, Y = 3 - i\right) = C_3^i p^i \left(1 - p\right)^{3-i},$$

где p – вероятность выпадения герба, $p = \dfrac{1}{2}$; остальные вероятности равны нулю в силу линейной зависимости между величинами X и Y .

Таблица 1

X	Y			
	0	1	2	3
0	0	0	0	0,125
1	0	0	0,375	0
2	0	0,375	0	0
3	0,125	0	0	0

Учитывая зависимость $X+Y=3$, делаем вывод о том, что коэффициент корреляции $\rho_{X,Y}=-1$.

Ответ: закон распределения записан в виде таблицы 1; коэффициент корреляции равен -1.

Задание 5:

а) используя критерий χ^2 (Пирсона), при уровне значимости 0,05, проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема $n=100$ (таблица 2). Построить на одном чертеже гистограмму относительных частот выборки и график плотности вероятностей предполагаемого нормального закона распределения;

б) если оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X нет, построить симметричный доверительный интервал доверительной вероятности 0,95 для неизвестного среднего значения рассматриваемой генеральной совокупности.

В противном случае, записать общие выражения для границ симметричного доверительного интервала доверительной вероятности α для неизвестного среднего нормального закона при неизвестной дисперсии.

Решение:

а) размах выборки равен $4{,}9$. Расположив выборочные данные в порядке их возрастания, разобьём область выборки на семь промежутков одинаковой длины $h=0{,}7$. Для каждого промежутка определим его середину $\overline{x_i}$, количество n_i попадающих в него вариант, их относительную частоту $\frac{n_i}{n}$ и плотность относительной частоты $\frac{n_i}{nh}$. Результаты запишем в таблицу 3.

Таблица 2

–0,5	–0,7	0,6	–0,9	–0,5	–1,6	1,3	–0,1	0,7	1,5
–1,4	0,6	1,3	–0,7	–0,1	1,1	0,3	–1,2	–1,1	–0,6
–1,3	–0,7	0,3	1,3	–0,1	0,3	–0,8	–1,5	1,4	0,0
–0,2	1,9	–0,3	–0,6	1,5	–0,3	0,5	–1,0	–0,2	0,0
–0,9	1,4	–2,1	–0,1	–1,4	–0,9	1,2	0,6	1,8	0,3
–1,6	–0,6	0,2	0,4	0,5	–0,7	0,0	0,1	–1,1	0,6
0,6	–0,8	–2,1	–1,4	–1,9	1,1	–0,2	–2,3	0,5	0,9
0,0	0,8	–1,2	0,2	–1,6	1,1	–1,0	1,7	–0,2	2,6
–1,5	–0,2	–0,6	2,0	0,9	2,4	–0,7	–1,2	–1,4	–0,1
0,4	0,0	0,4	1,6	–0,4	1,7	0,8	–0,4	0,5	–0,5

Таблица 3

$\lvert x_{i-1}, x_i \rvert$	$[-2,3;-1,6)$	$[-1,6;-0,9)$	$[-0,9;-0,2)$	$[-0,2;0,5)$
$\overline{x_i}$	$-1,95$	$-1,25$	$-0,55$	$0,15$
n_i	4	17	21	25
n_i/n	0,04	0,17	0,21	0,25
n_i/nh	$4/70$	$17/70$	$21/70$	$25/70$

Продолжение таблицы 3

$\lvert x_{i-1}, x_i \rvert$	$[0,5;1,2)$	$[1,2;1,9)$	$[1,9;2,6]$
$\overline{x_i}$	$0,85$	$1,55$	$2,25$
n_i	17	12	4
n_i/n	0,17	0,12	0,04
n_i/nh	$17/70$	$12/70$	$4/70$

Вычислим числовые характеристики выборки. Выборочное среднее

$$m^* = \sum_{i=1}^{7} \frac{\overline{x_i} n_i}{n} = -1,95 \cdot 0,04 + (-1,25) \cdot 0,17 + (-0,55) \cdot 0,21 + 0,15 \cdot 0,25 +$$

$$+0,85 \cdot 0,17 + 1,55 \cdot 0,12 + 2,25 \cdot 0,04 = 0,052 \approx 0,1;$$

выборочное среднее квадратичное отклонение

$$\sigma^* = \sqrt{\sum_{i=1}^{7} \frac{\overline{x_i}^2 n_i}{n} - m^{*2}} = \sqrt{(-1,95)^2 \cdot 0,04 + (-1,25)^2 \cdot 0,17 + (-0,55)^2 \cdot 0,21 + 0,15^2 \times}$$

$$\overline{\times 0,25 + 0,85^2 \cdot 0,17 + 1,55^2 \cdot 0,12 + 2,25^2 \cdot 0,04 - 0,052^2} \approx 1,1;$$

$$s^* = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sigma^* \approx 1,1 .$$

Гистограмма относительных частот

$$f^*(x) = \begin{cases} 4/70, & -2,3 \le x < -1,6; \\ 17/70, & -1,6 \le x < -0,9; \\ 21/70, & -0,9 \le x < -0,2; \\ 25/70, & -0,2 \le x < 0,5; \\ 17/70, & 0,5 \le x < 1,2; \\ 12/70, & 1,2 \le x < 1,9; \\ 4/70, & 1,9 \le x \le 2,6. \end{cases}$$

Плотность вероятностей предполагаемого нормального закона распределения

$$f(x) = \frac{1}{1,1\sqrt{2\pi}} e^{-(x-0,1)^2/2,42},$$

функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{1,1\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(u-0,1)^2/2,42} du$$

(параметры распределения заменены их оценками $m = m^*$, $\sigma = s^*$).

Строим на одном чертеже графики функций $f^*(x)$ и $f(x)$ (рисунок 1).

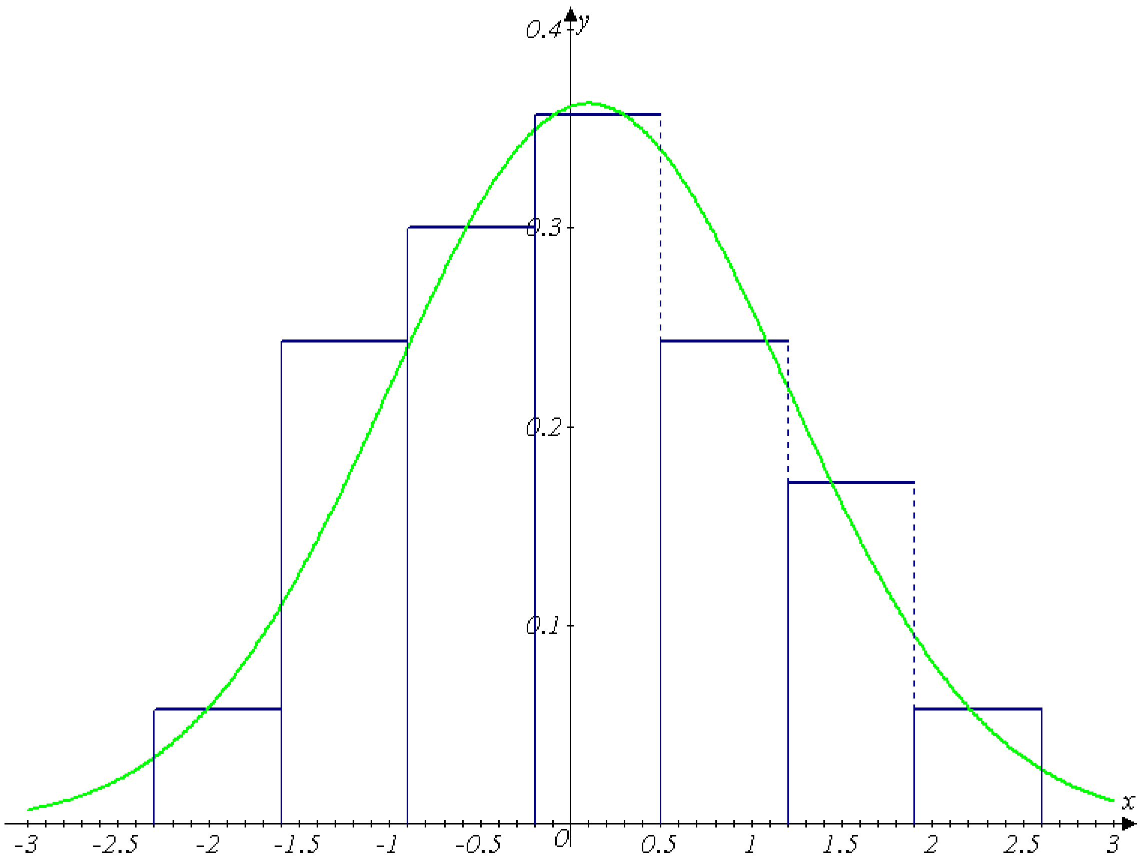

Рисунок 1

Определим вероятности:

$$p_1 = P(X < -1{,}6) = F(-1{,}6) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{-1{,}6 - 0{,}1}{1{,}1}\right) \approx 0{,}5 + \Phi_0(-1{,}55) =$$
$$= 0{,}5 - \Phi_0(1{,}55) \approx 0{,}5 - 0{,}4394 = 0{,}0606\,;$$

$$p_2 = P(-1{,}6 \le X < -0{,}9) = F(-0{,}9) - F(-1{,}6) = \Phi_0\left(\frac{-0{,}9 - 0{,}1}{1{,}1}\right) - \Phi_0\left(\frac{-1{,}6 - 0{,}1}{1{,}1}\right) \approx$$
$$\approx \Phi_0(-0{,}90) - \Phi_0(-1{,}55) = \Phi_0(1{,}55) - \Phi_0(0{,}90) \approx 0{,}4394 - 0{,}3159 = 0{,}1235\,;$$

$$p_3 = P(-0{,}9 \le X < -0{,}2) \approx \Phi_0(0{,}90) - \Phi_0(0{,}27) \approx 0{,}3159 - 0{,}1064 = 0{,}2095\,;$$

$$p_4 = P(-0{,}2 \le X < 0{,}5) \approx \Phi_0(0{,}36) + \Phi_0(0{,}27) \approx 0{,}1406 + 0{,}1064 = 0{,}247\,;$$

$$p_5 = P(0{,}5 \le X < 1{,}2) \approx \Phi_0(1) - \Phi_0(0{,}36) \approx 0{,}3413 - 0{,}1406 = 0{,}2007\,;$$

$$p_6 = P(1,2 \le X < 1,9) \approx \Phi_0(1,64) - \Phi_0(1) \approx 0,4495 - 0,3413 = 0,1082;$$

$$p_7 = P(X \ge 1,9) = 1 - F(1,9) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{1,9-0,1}{1,1}\right) \approx 0,5 - \Phi_0(1,64) \approx$$
$$\approx 0,5 - 0,4495 = 0,0505,$$

здесь

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du,$$

значения функции Φ_0 взяты из соответствующей таблицы, и найдём значение статистики критерия χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(4 - 100 \cdot 0,0606)^2}{100 \cdot 0,0606} + \frac{(17 - 100 \cdot 0,1235)^2}{100 \cdot 0,1235} + \frac{(21 - 100 \cdot 0,2095)^2}{100 \cdot 0,2095} +$$
$$+ \frac{(25 - 100 \cdot 0,2470)^2}{100 \cdot 0,2470} + \frac{(17 - 100 \cdot 0,2007)^2}{100 \cdot 0,2007} + \frac{(12 - 100 \cdot 0,1082)^2}{100 \cdot 0,1082} + \frac{(4 - 100 \cdot 0,0505)^2}{100 \cdot 0,0505} =$$
$$= \frac{4,2436}{6,06} + \frac{21,6225}{12,35} + \frac{0,0025}{20,95} + \frac{0,09}{24,70} + \frac{9,4249}{20,07} + \frac{1,3924}{10,82} + \frac{1,1025}{5,05} \approx 3,27.$$

Так как число интервалов равно семи, а число неизвестных параметров – двум, то χ^2-распределение, используемое для приближённого нахождения критического значения C, имеет четыре степени свободы. По таблице находим $0,95$-квантиль χ^2-распределения с четырьмя степенями свободы $h_{0,95} \approx 9,5$. Сравнивая значение $\chi^2 = 3,27$ с $h_{0,95} = 9,5$, констатируем, что следует признать справедливость гипотезы о нормальном распределении рассматриваемой генеральной совокупности;

б) границы симметричного доверительного интервала доверительной вероятности α для неизвестного среднего нормального закона при неизвестной дисперсии находятся по формулам:

$$\theta' = m^* - \frac{t_{(1+\alpha)/2} \cdot s^*}{\sqrt{n}}; \quad \theta'' = m^* + \frac{t_{(1+\alpha)/2} \cdot s^*}{\sqrt{n}},$$

где $t_{(1+\alpha)/2}$ – $\dfrac{1+\alpha}{2}$-квантиль t-распределения (Стьюдента) с $(n-1)$ степенью свободы.

В данном случае:

$$\theta' = 0{,}1 - \frac{t_{0,975} \cdot 1{,}1}{\sqrt{100}} \approx 0{,}1 - \frac{2{,}386 \cdot 1{,}1}{10} \approx -0{,}16\,;$$

$$\theta'' \approx 0{,}1 + \frac{2{,}386 \cdot 1{,}1}{10} \approx 0{,}36\,,$$

доверительный интервал $(-0{,}16; 0{,}36)$.

Ответ: критерий χ^2 подтверждает гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности; симметричный доверительный интервал для неизвестного среднего – $(-0{,}16; 0{,}36)$.

4 Варианты контрольных заданий

Задание 1

Вариант 1. В урне четыре белых и пять черных шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найти вероятность того, что один из этих шаров – белый, а другой – черный.

Вариант 2. Внутрь круга радиусом R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в произвольную часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

Вариант 3. Четыре стрелка ведут огонь по семи целям. Каждый стрелок выбирает себе цель случайно и независимо от других стрелков. Найти вероятность того, что все стрелки будут стрелять по разным целям.

Вариант 4. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 6 см, наудачу брошен круг радиусом 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечет ни одной из прямых.

Вариант 5. На 10 карточках написаны буквы А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. После перестановки вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что на карточках будет написано слово «МАТЕМАТИКА».

Вариант 6. На отрезок AB длиной 12 см наугад бросают точку M, причем вероятность попадания точки в какой-либо подынтервал отрезка AB не зависит от его положения внутри AB и пропорциональна его длине.

Какова вероятность того, что площадь квадрата, построенного на AM, будет больше 36 и меньше 81 см^2?

Вариант 7. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.

Вариант 8. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

Вариант 9. В лифт девятиэтажного дома на первом этаже вошло пять человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на одном и том же этаже.

Вариант 10. Дано уравнение $x^2 + ax + b = 0$. Известно, что $0 \le a \le 1$ и $0 \le b \le 1$, причем вероятность попадания каждой из точек a и b в какой-либо интервал отрезка $[0,1]$ пропорциональна длине интервала и не зависит от его положения относительно отрезка $[0,1]$. Найти вероятность того, что данное уравнение имеет действительные корни.

Задание 2

Вариант 1. Известно, что 96 % выпускаемых заводом изделий отвечают стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту.

Вариант 2. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: одну партию из двух или две партии из четырех?

Вариант 3. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Вариант 4. Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений тройки было равно 55?

Вариант 5. По воздушной цели производится стрельба из двух различных ракетных установок. Вероятность поражения цели первой установкой равна 0,85, второй – 0,9, а вероятность поражения цели двумя установками равна 0,99. Найти вероятность поражения цели, если известно, что первая установка срабатывает с вероятностью 0,8, а вторая – с вероятностью 0,7.

Вариант 6. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

Вариант 7. Счетчик регистрирует частицы трех типов: A, B и C. Вероятность появления этих частиц $P(A)=0,2$, $P(B)=0,5$, $P(C)=0,3$. Частицы каждого из этих типов счетчик улавливает с вероятностями $p_1=0,8$, $p_2=0,2$, $p_3=0,4$. Счетчик отметил частицу. Определить вероятность того, что это была частица типа B.

Вариант 8. Имеется n радиолокационных станций, следящих за одним объектом. Каждая станция обнаруживает объект независимо от других станций с вероятностью p. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен.

Вариант 9. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится не менее 60 и не более 80 раз.

Вариант 10. Вероятность отказа детали 0,4. Для повышения надежности устройства детали дублируются, т. е. вместо одной берется n деталей. Каково должно быть n, чтобы вероятность безотказной работы равнялась 0,99?

Задание 3

Вариант 1. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному дифференциальной функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, \ x<0;\\ 0,6e^{-0,6x}, \ x\ge 0.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(2,5)$.

Вариант 2. Найти закон распределения дискретной случайной величины X, которая может принимать только два значения: x_1 – с вероятностью $p_1=0,4$ и x_2 (причем $x_1<x_2$), если известны математическое ожидание $M[X]=3,2$ и дисперсия $D[X]=0,96$.

Вариант 3. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(2,8)$.

Вариант 4. При работе некоторого прибора в случайные моменты времени возникают неисправности, поток которых можно считать простейшим. Среднее число неисправностей за сутки равно двум. Требуется определить вероятность того, что за двое суток не будет ни одной неисправности.

Вариант 5. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с параметрами $m=2$, $\sigma=1$. Определить вероятность неравенства $0<X<3$.

Вариант 6. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M\left[X\right]=2{,}3$, $M\left[X^2\right]=5{,}9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

Вариант 7. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0{,}02t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t=100$ ч элемент не откажет.

Вариант 8. Имеется шесть ключей, из которых только один подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток при открывании замка, если ключ, не подошедший к замку, в последующих опробованиях не участвует.

Вариант 9. Определить среднеквадратичную ошибку прибора, если систематических ошибок он не имеет, а случайные ошибки распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,95 не выходят за пределы ±20 мк.

Вариант 10. Доказать, что математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании равно вероятности p появления события A.

Задание 4

Вариант 1. Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p. Рассматриваются две случайные величины: X – число появления события A, Y – число появления противоположного события. Составить таблицу распределения и определить коэффициент корреляции системы.

Вариант 2. Система случайных величин (X,Y) равномерно распределена в круге радиусом R с центром в начале координат. Определить законы распределения величин X и Y.

Вариант 3. Задана дискретная двумерная случайная величина (X, Y) (таблица 4).

Таблица 4

X	Y		
	10	14	18
3	0,25	0,15	0,32
6	0,10	0,05	0,13

Найти условный закон распределения Y при условии, что $X = 6$.

Вариант 4. Задана дифференциальная функция непрерывной двумерной случайной величины (X,Y): $f(x,y) = \frac{1}{4}\sin x \sin y$ в квадрате $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$; вне квадрата $f(x,y) = 0$. Найти математические ожидания составляющих.

Вариант 5. Найти условное математическое ожидание $M\left[X|Y\right]$ случайной величины X – числа очков, выпавших на верхней грани игральной кости, относительно случайной величины Y – числа очков, выпавших на нижней грани.

Вариант 6. Система случайных величин (X,Y) равномерно распределена в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. Определить плотность вероятности и функцию распределения системы (X,Y).

Вариант 7. Задана дискретная двумерная случайная величина (X,Y) (таблица 5).

Таблица 5

X	Y		
	1	2	3
-1	0,1	0,25	0,05
0	0,2	0,1	0,3

Найти дисперсии величин X и Y.

Вариант 8. Задана дифференциальная функция непрерывной двумерной случайной величины (X,Y): $f(x,y)=\frac{1}{2}\sin(x+y)$ в квадрате $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\frac{\pi}{2}$; вне квадрата $f(x,y)=0$. Найти дисперсию составляющей X.

Вариант 9. Найти коэффициент корреляции между числом выпадений единицы и числом выпадений шестерки при двух подбрасываниях симметричного кубика.

Вариант 10. Система двух случайных величин (X,Y) подчинена нормальному закону распределения с параметрами $m_X=1$, $m_Y=2$, $\sigma_X=3$, $\sigma_Y=1$, $\rho_{XY}=0,4$. Написать выражение для плотности вероятности этой системы.

Задание 5:

а) используя критерий χ^2 (Пирсона), при уровне значимости 0,05, проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема n = 100. Построить на одном чертеже гистограмму относительных частот выборки и график плотности вероятностей предполагаемого нормального закона распределения (таблица 6);

б) если оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X нет, построить симметричный доверительный интервал доверительной вероятности 0,95 для неизвестного среднего значения рассматриваемой генеральной совокупности.

В противном случае, записать общие выражения для границ симметричного доверительного интервала доверительной вероятности α для неизвестного среднего нормального закона при неизвестной дисперсии.

Таблица 6

Вариант 1	–0,7	–0,1	–1,6	0,5	–3,9	–0,7	–1,4	–0,4	0,1	–1,3
	0,1	–2,9	1,2	0,5	–0,9	–0,9	–2,6	–2,3	–1,1	–1,4
	0,1	–2,9	–0,3	–1,3	–1	–0,4	–2,2	–1,5	–0,9	–1,4
	–0,6	–2,7	0,1	–2,9	–0,2	–1,5	0,4	–1,8	0,2	–0,3
	0	–1,2	0,2	–1	0,3	–1,4	–1,5	–2,1	–2,4	–0,2
	–0,7	–0,3	–0,7	–0,9	–4,1	–2,6	–1,1	–2,6	–1,4	–1,3
	–1,8	–2,7	–0,5	–0,3	–0,9	–2,4	–1	–0,7	0,5	–0,7
	–1,5	–0,8	–0,2	–0,5	–2,4	–0,7	–1,6	–1,3	–0,9	–2,1
	–1,2	–1,3	–0,4	–0,5	–1,1	–1,7	–0	–1,5	0,7	–2,7
	0,5	1,4	–1,2	–1,7	–0,4	–0,7	–1	–3,8	–0,5	–1,2
Вариант 2	–1,8	–0,9	–1,5	–2,3	–1,7	–1,5	–0,4	–1,7	–1,6	–0,5
	–1,7	0,5	–1,3	–1,7	–1,2	–2,4	–2,1	–2,4	0,1	0
	–1,3	–1,3	–2,1	–1,1	–1,2	–0,8	0,4	–1,2	0,7	–0,2
	–2,7	0,8	–1,1	–1	–1,5	–2,1	–1,3	–1,9	–0,2	–0,9
	–0,8	–1,2	1	0,2	–1,2	0,6	0,1	0,5	0,1	–0,4
	–1,6	0,2	–1,2	–0,4	–1,3	–0,6	–3,4	–1	–2,2	–1,7
	–1,3	–2	–0,4	–1,9	–2,4	–0,8	–2,1	–0,9	–1	0,1
	0,4	–2,4	–1,9	–1,1	–1,1	–0,4	2,1	–3	–0,2	–2,3
	–1,3	0,2	–2	–1,9	–0,8	–2,8	–2,2	–0,4	–2,5	–0,8
	–1,5	–4,4	–2,9	–0,8	–1,3	–1,6	–0,9	–0,6	–1,9	–2,3
Вариант 3	1,9	0,9	1,1	1,7	2,2	1,4	0,8	–0,8	1,2	–0,8
	0	0,6	1,5	0,3	0,4	2,3	0,5	1	1,5	–0,2
	1,3	2,9	2,6	0,6	1	1	2,4	–0,3	1,5	–0,6
	–0,4	1,9	0,8	–0,4	2,1	1,4	0,8	0,3	0,5	2,1
	2,1	3,3	2,7	2,3	1,4	0,4	1,6	2,2	1,1	0,9
	0,2	0,4	1,8	1	0	–0,3	0,2	1,6	1,2	–1
	2,7	0	0,8	1,7	0,1	2,3	0,9	2,8	0,1	1,6
	0,9	–0,2	1,5	2,5	0,5	1,1	1,1	1,4	1,6	1,9
	3,4	1	0,6	1,2	1,3	1,4	0,1	2,6	1,1	0,9
	–0,1	–0,9	2,2	0,3	1,1	2,1	0,8	0,9	–0,2	2,3
Вариант 4	–0,3	0	–1	1,3	–0,3	–0,3	0,9	1,5	0,8	–0,6
	–1,5	–0,6	–0,2	–0,7	0,7	0,2	–0,3	–0,2	0,5	–0,7
	–0,2	–0,7	0,4	0,4	–1	1	0,5	1,4	0,4	0,3
	–1	0,9	–0,5	–0,8	–0	0	1,6	1,9	1,3	2,3

Продолжение таблицы 6

	–0,8	0,2	1,8	1,1	1,3	–0,4	–0,4	0,3	–1,4	0
	–0,2	0,8	1,5	0,9	–0,2	1,8	0,8	–0,1	1	–0,3
	–1,2	0,5	–0,9	1,1	–0,1	–0,6	1,1	–0,6	–0	–1
	0,4	1,4	0,7	–1,5	0,7	–1,3	0,8	1,9	–0,2	–0,8
	–0,3	–0,7	0,4	1	0,4	0,8	–1,7	0,5	–0,2	–0,6
	–1,8	–0,9	–2,5	0	0,4	–0,1	–1,4	0,1	–0,2	–0,3
Вариант 5	–0,7	0	–0,1	1,7	–0,5	–0,4	0,5	0,4	2,1	–0,2
	–0,8	0,8	–0,1	0,2	–0,1	–0,4	–0,1	–2,1	1,6	0,9
	0	–2,3	–1,4	0,4	–1,3	1,5	1,4	0,1	1,3	–1,3
	1	–1	0,2	–1,2	–0,1	0,6	–0,2	–0,3	1	0,5
	–0,4	–0,4	0,5	–1,1	–0,4	0,1	0,3	–0,6	0,5	–0,7
	–0,5	1,1	–1,5	0,4	0,4	1,8	0,7	–0,1	0,6	0,6
	–1,1	–0,9	–1,5	–0,5	0,4	–0,4	0,9	1,1	0,3	–0,5
	0,3	1,6	–0,5	1,3	0,2	–1,7	1,4	0,3	0,5	0,2
	0,7	–0,1	–0,9	–0,5	1,6	–2,1	0,2	–0,3	–1,4	0,1
	0,4	1	1,6	0,2	0,6	1,3	–1,7	1,1	–0,7	0,3
Вариант 6	0,3	1,4	1,5	0,5	1,2	0,6	1,3	–0,3	0,9	1
	0,9	0,7	0	–0,1	0,9	0,1	0,9	1,6	2,3	1,1
	–1	0,7	1,6	2,8	1,6	0,5	–0,4	1,2	2	1,1
	0,7	0,1	0,7	1,6	1,5	3,3	–1,6	1,3	–0,9	0,3
	0,4	2,8	0,3	0,9	1,5	2,6	0,6	1,7	2,7	1,5
	0,3	0,9	–0,2	1,6	1,7	1,2	2,5	1,4	–0,5	0,4
	0,8	1,7	2,6	1,5	–0,5	1	1,8	1,6	0	1,3
	1	2,6	1,2	0,8	1,8	1,8	0,4	0,7	1,7	0,7
	3,1	1,1	–0,1	1,8	0,8	1,9	–0,9	–0,2	0,4	0,6
	0,8	1,3	1,2	0,8	2,3	0,9	2,3	–0,4	0,8	2
Вариант 7	0,1	1,5	0	2,9	1,9	–0,8	0,7	0,1	1,1	–0,3
	0,1	–1,6	1,5	–2,1	–0,9	1	1,6	–0,4	–0,3	–0,8
	–1	–1,2	–0,2	–1,5	1,4	–1,5	–0,7	–0,3	1,3	0,2
	–0,4	0,4	–0,5	1,6	0	2,1	–0,8	–0,4	1,4	–0,3
	0,8	–0,8	0,4	1,4	0,7	1,2	–0,8	0,2	1,6	–0,6
	0,1	1,3	–0,3	–1	0,6	–0,8	0,6	–0,9	1,4	1
	–0,5	–0,3	–0,8	0,8	0,4	–0,5	0,3	0,3	0,8	0,6
	–1	–0,9	–0,3	1,7	0,8	0,8	0,5	–0,3	–0,3	–0,9

Окончание таблицы 6

	1	–2,1	–1	0,4	0,9	–0,3	–0,1	–2,6	0,9	–0,6
	0,4	0,5	–1,1	0	–0,5	–0,8	0	0,6	1,7	–1
Вариант 8	–0,7	–0,7	0	–0,3	–0,7	0,1	0,9	–1,8	0,7	0,1
	1,3	0,6	0,3	0,9	–1	–0,2	0,8	–0,8	0	–0,2
	–0,7	–1,8	0,7	0	–0,1	0,7	–1	0,4	–0,3	–1,6
	0,7	0	0	0,4	1,1	0,5	–0,1	0,4	–1,3	1,2
	–0,1	0,9	–0,3	–0,9	–1,9	1,3	0,5	–0,8	0,9	–0,9
	0,8	1,2	–0,7	–0,5	–0,7	0,9	0,9	–0,5	0	1
	–0,4	1,4	1,6	0,3	–1	–1,4	–0,7	0,6	1,7	0,4
	–1	1,1	1	1,9	–0,8	0,5	–0,6	–0,3	1,5	1,8
	–1,6	0,5	–2,4	–0,7	–0,4	0,3	–1	0,8	0,7	0,2
	–0,1	–0,5	0,4	–1,7	0,2	0,4	1,1	0,6	–2,5	0,6
Вариант 9	2,7	2,3	–1,3	1,3	1,1	0	1,7	0,8	1,4	0,9
	1	1,3	2,2	0,9	2,4	1	1,3	2,3	1,5	1,4
	1,7	2,3	2	2,8	1	0,9	1	2	1	0,8
	2	1,9	0,1	0,7	0,5	1,1	–0,7	1,1	1,3	2,5
	0,5	2,3	2,2	1	1,9	0,2	2,3	2,4	1,5	0,5
	0,5	1,6	–0,4	0,1	2,4	2	0,1	1	1	1,2
	0,3	0,6	0	2,3	1,7	–0,9	1,7	1,5	2,4	2,1
	1,6	1,3	–0,6	0,8	0,4	1,5	1,4	0,9	0,3	1,5
	1,4	1,1	1,7	1,6	1,1	1,4	2	1,1	0	–1,5
	0,3	0	–0,9	0,9	1,3	0,2	0	1,8	1,3	0,7
Вариант 10	0,9	1,1	1,9	2,2	1,1	0,5	1,1	–0,1	1,6	0,8
	0,3	2	1,1	0,5	1,6	2,6	1	2	–0,2	1,9
	1,3	1	1	–1,1	1,4	0,7	–0,7	–0,6	0,8	1,9
	–0,2	2,4	1,3	1,1	2,9	0,7	1,2	0,1	1	0,4
	1	0,8	2,9	1,1	1,3	–0,5	1,1	1,3	–0,3	0,5
	2,8	1,3	1,8	0,8	2,7	1,3	1,7	0,5	0,9	1,1
	0	1,5	1,2	–0,6	0,4	1,2	1,5	0,1	0,8	1,8
	1,3	–0,6	1,3	1,6	0	1,4	0,1	2,3	–1	0,4
	1,7	–1,5	2,2	1,6	–1,1	1	0,5	–0,2	3,8	2,2
	1,1	1,3	2	0	1,7	0,2	–0,1	–0,4	0,2	1,1

Список литературы

1 **Белько, И. В.** Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи : учеб. пособие / И. В. Белько, Г. П. Свирид. – Минск : Новое знание, 2002. – 250 с.

2 **Вентцель, Е. С.** Задачи и упражнения по теории вероятностей : учеб. пособие / Е. С. Вентцель. – М. : Высш. шк., 2000. – 336 с.

3 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высш. шк., 2000. – 480 с.

4 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2000. – 400 с.

5 **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2002. – 479 с.

6 **Гурский, Е. И.** Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для втузов / Е. И. Гурский. – Минск : Выш. шк., 1984. – 223 с.

7 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика : учеб. пособие для втузов / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1988. – Ч. 5. – 253 с.

8 **Розанов, Ю. А.** Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика : учебник / Ю. А. Розанов. – М. : Наука, 1985. – 320 с.

9 Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / Под. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 1992. – 189 с.

10 **Севастьянов, Б. А**. Сборник задач по теории вероятностей : учеб. пособие для вузов / Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, А. М. Зубков. – М. : Наука, 1980. – 224 с.