ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты заданий к контрольной работе №3
для студентов заочной формы обучения специальности 1-53 01 02
«Автоматизированные системы обработки информации»

Могилев 2008

УДК 51
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой высшей математики 7 марта 2007 г., протокол № 6

Составители: В. Г. Замураев;
Т. Ю. Орлова;
С. Ф. Плешкунова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Л. В. Плетнёв

Методические указания предназначены для самостоятельной подготовки студентов заочной формы обучения специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации»

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск Л. В. Плетнёв

Технический редактор И. В. Русецкая

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ №02330/375 от 29.06.2004 г.
212005, г. Могилев, пр. Мира, 43

Содержание

1 Программа курса

Тема 1. Числовые и функциональные ряды.

Числовой ряд и его сумма. Необходимое условие сходимости ряда. Достаточные условия сходимости ряда: признаки сравнения; признаки Д'Аламбера и Коши; интегральный признак. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Функциональные ряды, сумма ряда и область сходимости. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда. Ряды Тейлора. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора.

Тема 2. Ряды и интеграл Фурье.

Тригонометрический ряд Фурье. Достаточные условия сходимости тригонометрических рядов Фурье. Ряд Фурье для функций с периодом 2π и для функций с произвольным периодом. Интеграл Фурье. Косинус- и синус-преобразования Фурье.

Тема 3. Элементы теории функций комплексной переменной.

Функции комплексной переменной. Предел и непрерывность функции комплексной переменной. Производная функции комплексной переменной. Понятие аналитической функции, условия Коши-Римана. Интеграл от функции комплексной переменной. Теорема Коши и интегральная формула Коши. Ряд Лорана и область его сходимости. Изолированные особые точки аналитических функций. Вычеты аналитических функций. Основная теорема о вычетах.

Тема 4. Операционное исчисление.

Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение. Свойства преобразования Лапласа: линейность; подобие; дифференцирование оригинала и изображения; интегрирование оригинала и изображения; запаздывание оригинала; смещение изображения; изображение свёртки. Формула обращения преобразования Лапласа. Теорема разложения.

2 Общие требования к оформлению контрольной работы

2.1 Выбор варианта заданий

Номер варианта заданий равен последней цифре номера зачётной книжки. Если же последняя цифра – ноль, то следует выполнять задания варианта номер 10.

2.2 Правила оформления контрольной работы

Работа оформляется в отдельной тонкой тетради в обычную клетку.

На обложке тетради указывается название дисциплины; номер группы и название факультета; фамилия, имя, отчество, номер зачётной книжки; обратный адрес; номер варианта заданий.

Решения заданий приводятся в порядке, установленном в вариантах заданий.

Перед каждым решением указывается номер задания и его полное условие.

Решения приводятся с необходимыми краткими пояснениями, записываются крупным и разборчивым почерком. Чертежи выполняются простым карандашом.

Оформление каждого задания начинается с новой страницы.

В конце работы приводится список литературы, использованной при решении заданий.

Незачтённые работы не оформляются заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводятся в конце работы.

При несоблюдении хотя бы одного из указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированную и зачтённую контрольную работу вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтённой контрольной работы студент не допускается к сдаче экзамена.

3 Решение типового варианта

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, используя: а) признаки сравнения; б) признаки Д'Аламбера, Коши или интегральный признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\sqrt{2n+5}}{2^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{6n+\sqrt{n}+5}\right)^n$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$.

Решение.

а) Все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$ положительны. Сравним этот ряд со сходящимся геометрическим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Так как $\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^n}<\dfrac{1}{2^n}$, то на основании признака сравнения заключаем, что исследуемый ряд сходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+5}$ сравним с расходящимся рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[6]{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1/6}}$.

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+5}:\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n}+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+5}=1,$$

то на основании предельного признака сравнения заключаем, что исследуемый ряд расходится;

б) заменяя в формуле $a_n=\dfrac{n!\sqrt{2n+5}}{2^n}$, определяющей общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\sqrt{2n+5}}{2^n}$, n на $n+1$, получаем $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)!\sqrt{2n+7}}{2^{n+1}}$.

Составим отношение последующего члена к предыдущему:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!\sqrt{2n+7}}{2^{n+1}}:\frac{n!\sqrt{2n+5}}{2^n}=\frac{(n+1)!\sqrt{2n+7}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n!\sqrt{2n+5}}=\frac{n+1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2n+7}{2n+5}}.$$

Найдём предел этого отношения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2n+7}{2n+5}}=\infty.$$

На основании признака Д'Аламбера заключаем, что ряд расходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{6n+\sqrt{n}+5}\right)^n$ исследуем на сходимость по признаку Коши.

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{6n+\sqrt{n}+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{6n+\sqrt{n}+5}=\frac{1}{2}<1,$$

то ряд сходится.

Расходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ установим с помощью интегрального признака Коши.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. При $x\geq 2$ эта функция непрерывна, неотрицательна и убывает. Интеграл

$$\int_2^{+\infty}f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln(\ln x)-\ln(\ln 2)=\infty$$

расходится, поэтому расходится и рассматриваемый ряд.

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$.

Решение. Так как $a_n=\frac{2^n}{3^n\sqrt{n}}$, $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}$, то радиус сходимости данного ряда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 3^{n+1}\sqrt{n+1}}{3^n\sqrt{n}\cdot 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}=\frac{3}{2}.$$

Интервал сходимости определяется неравенством $|x-1|<\frac{3}{2}$, т. е. ряд сходится в интервале $\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=\frac{5}{2}$ получаем расходящийся ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{5}{2}-1\right)^n}{3^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n}{3^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

При $x=-\dfrac{1}{2}$ получаем сходящийся условно ряд Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\ldots>\frac{1}{\sqrt{n}}>\ldots,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Таким образом, областью сходимости рассматриваемого степенного ряда является промежуток $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$.

Задание 3. Разложить функцию $y=\dfrac{3}{x+3}$ в ряд Маклорена, используя известные разложения. Найти область сходимости полученного ряда.

Решение. Преобразовав данную функцию:

$$y=\frac{3}{3\left(1+\frac{x}{3}\right)}=\frac{1}{1+\frac{x}{3}}$$

и используя известное разложение

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ |x|<1,$$

получаем

$$\frac{3}{x+3}=\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}-\frac{x^3}{3^3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{3^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n}.$$

Ряд сходится при $\left|\dfrac{x}{3}\right|<1$, т. е. при $|x|<3$.

Задание 4. Разложить функцию $y=\dfrac{x}{4}+2$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0,2]$, продолжив её чётным образом на отрезок $[-2,2]$.

Решение. Продолжим функцию чётным образом на отрезок $[-2,2]$ и затем периодически с периодом $2l=4$ на всю числовую ось (рисунок 1).

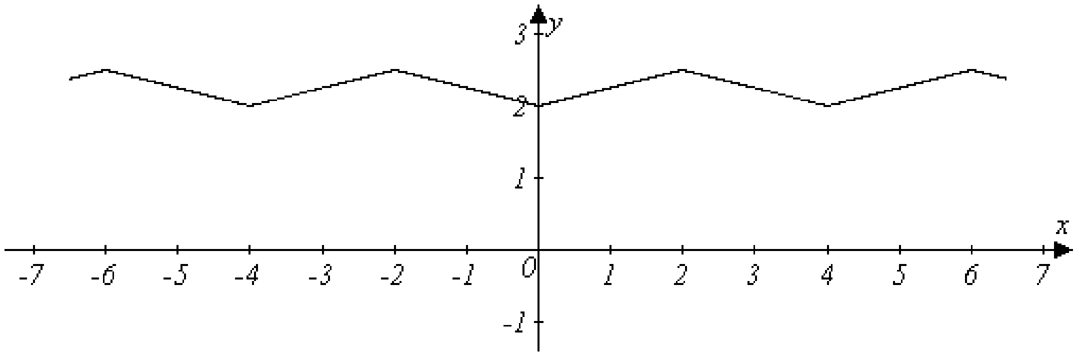

Рисунок 1

Найдём коффициенты ряда Фурье полученной функции.

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2\left(\frac{x}{4}+2\right)dx = \left.\left(\frac{x^2}{8}+2x\right)\right|_0^2 = \frac{1}{2}+4 = \frac{9}{2}.$$

$$a_n = \int_0^2\left(\frac{x}{4}+2\right)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^2\left(\frac{x}{4}+2\right)d\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right) =$$

$$= \left.\left(\frac{x}{4}+2\right)\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2 - \int_0^2\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}d\left(\frac{x}{4}+2\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{4}+2\right)\cdot\frac{2}{n\pi}\sin n\pi - 2\cdot\frac{2}{n\pi}\sin 0 - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= \left.\frac{1}{2n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2 = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0,\ n = 2k, \\ -\dfrac{2}{n^2\pi^2},\ n = 2k-1;\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ряд Фурье имеет вид $\dfrac{9}{4} - \dfrac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\cos\dfrac{(2k-1)\pi x}{2}$.

Задание 5. Исследовать функцию $w = \mathrm{Re}\left(z^2\right)$ на дифференцируемость и аналитичность и найти её производную, если она существует.

Решение.

$$w = \operatorname{Re}\left(z^2\right) = \operatorname{Re}(x+iy)^2 = \operatorname{Re}\left(x^2 + 2x\cdot iy + (iy)^2\right) = \operatorname{Re}\left(x^2 - y^2 + i\cdot 2xy\right) = x^2 - y^2 .$$

Таким образом,

$$u(x,y) = \operatorname{Re} w = x^2 - y^2,\ v(x,y) = \operatorname{Im} w = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0 .$$

Очевидно, что условия Коши-Римана выполняются в данном случае лишь при $x = y = 0$, так что функция $w = \operatorname{Re}\left(z^2\right)$ является дифференцируемой в единственной точке $z = 0$, и её производная в этой точке равна $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0$.

Аналитической в данной точке функция не является, так как она недифференцируема ни в какой окрестности этой точки.

Задание 6. Найти все значения $\sin i$; $\operatorname{Ln}(-1)$; $(-1)^{\sqrt{2}}$.

Решение.

$$\sin i = \frac{1}{2i}\left(e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}\right) = \frac{i\left(e^{-1} - e^{1}\right)}{2i^2} = \frac{i\left(e^{-1} - e^{-1}\right)}{-2} = \frac{i\left(e^{1} - e^{-1}\right)}{2} = i\operatorname{sh}1 .$$

Так как $-1 = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$, то $\arg(-1) = \pi$,

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i\left(\arg(-1) + 2\pi k\right) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i\pi(2k+1),\ k\in\mathbb{Z} .$$

$$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\operatorname{Ln}(-1)} = e^{\sqrt{2}\cdot i\pi(2k+1)} = \cos\left(\sqrt{2}(2k+1)\pi\right) + i\sin\left(\sqrt{2}(2k+1)\pi\right),\ k\in\mathbb{Z} .$$

Задание 7. Вычислить интеграл, используя: а) теорему или интегральную формулу Коши; б) теоремы о вычетах (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z-1}dz$; б) $\oint\limits_{|z+1|=3} \dfrac{e^z}{z(z+1)^2}dz$.

Решение. а) Контур интегрирования представляет собой окружность радиуса 2 с центром в точке $z=0$. Функция $f(z)=\sin z$ аналитична во всей комплексной плоскости. Знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точке $z=1$, которая охватывается контуром интегрирования.

По интегральной формуле Коши

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z-1}dz = 2\pi i\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 2\pi i;$$

б) контур интегрирования представляет собой окружность радиуса 3 с центром в точке $z=-1$. Внутри контура находятся две изолированные особые точки подынтегральной функции: точка $z_1=-1$, являющаяся полюсом второго порядка, и точка $z_2=0$ – простой полюс.

Применяя первую теорему о вычетах, запишем

$$\oint\limits_{|z+1|=3} \frac{e^z}{z(z+1)^2}dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z_1=-1}\frac{e^z}{z(z+1)^2}+\operatorname*{res}_{z_2=0}\frac{e^z}{z(z+1)^2}\right).$$

$$\operatorname*{res}_{z_1=-1}\frac{e^z}{z(z+1)^2} = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-1}\left((z+1)^2\cdot\frac{e^z}{z(z+1)^2}\right)' = \lim_{z\to-1}\left(\frac{e^z}{z}\right)' = \lim_{z\to-1}\frac{\left(e^z\right)'\cdot z-e^z\cdot z'}{z^2} =$$

$$= \lim_{z\to-1}\frac{\left(e^z\right)'\cdot z-e^z\cdot z'}{z^2} = \lim_{z\to-1}\frac{(z-1)e^z}{z^2} = \frac{(-1-1)e^{-1}}{(-1)^2} = -\frac{2}{e}.$$

$$\operatorname*{res}_{z_2=0}\frac{e^z}{z(z+1)^2} = \lim_{z\to0} z\cdot\frac{e^z}{z(z+1)^2} = \lim_{z\to0}\frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{e^0}{(0+1)^2} = 1.$$

Таким образом, $\oint\limits_{|z+1|=3} \dfrac{e^z}{z(z+1)^2}dz = 2\pi i\left(1-\dfrac{2}{e}\right).$

Задание 8. Методами операционного исчисления решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y'' + y' + y + 1 = 0$ с нулевыми начальными условиями.

Решение. Применив к обеим частям уравнения преобразование Лапласа и учитывая нулевые начальные условия, перейдём от дифференциального уравнения к операторному уравнению

$$\left(p^2 + p + 1\right)Y(p) = -\frac{1}{p};$$

здесь $Y(p)$ – изображение искомого решения, $-\frac{1}{p}$ – изображение функции $f(x) = -1$ – правой части уравнения. Решая операторное уравнение относительно $Y(p)$:

$$Y(p) = -\frac{1}{p\left(p^2 + p + 1\right)}$$

и найдя оригинал для $Y(p)$, получим искомое решение $y(x)$.

Для отыскания оригинала представим $Y(p)$ в виде

$$Y(p) = \frac{p + 1/2}{\left(p + 1/2\right)^2 + 3/4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}/2}{\left(p + 1/2\right)^2 + 3/4} - \frac{1}{p}.$$

Действительно,

$$Y(p) = -\frac{1}{p\left(p^2 + p + 1\right)} = \frac{A}{p} + \frac{Mp + N}{p^2 + p + 1} = \frac{A\left(p^2 + p + 1\right) + p(Mp + N)}{p\left(p^2 + p + 1\right)} =$$

$$= \frac{(A + M)p^2 + (A + N)p + A}{p\left(p^2 + p + 1\right)},$$

откуда $A = -1$, $M = N = 1$ и

$$Y(p) = \frac{p + 1}{p^2 + p + 1} - \frac{1}{p} = \frac{p + 1/2}{p^2 + p + 1} + \frac{1/2}{p^2 + p + 1} - \frac{1}{p} = \frac{p + 1/2}{p^2 + p + 1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}/2}{p^2 + p + 1} - \frac{1}{p}.$$

Пользуясь таблицей изображений, находим решение задачи Коши

$$y(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-1=e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-1.$$

4 Варианты контрольных заданий

Вариант 1

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, используя: а) признаки сравнения; б) признаки Д'Аламбера, Коши или интегральный признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+7n}{5^n+n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$.

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n(n+1)}$.

Задание 3. Разложить функцию $y=\frac{1}{2x+5}$ в ряд Маклорена, используя известные разложения. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 4. Разложить функцию $y=x+1$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,\pi]$, продолжив её нечётным образом на отрезок $[-\pi,\pi]$.

Задание 5. Исследовать функцию $w=(z-1)\operatorname{Re}(z+1)$ на дифференцируемость и аналитичность и найти её производную, если она существует.

Задание 6. Найти все значения $(1+i)^i$.

Задание 7. Вычислить интеграл, используя: а) теорему или интегральную формулу Коши; б) теоремы о вычетах (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_{|z+i|=3}\frac{z^2-z+1}{z+1}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{\cos 2z}{z^2(z-2)}dz$.

Задание 8. Методами операционного исчисления решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y''-2y'-3y+e^x=0$ с нулевыми начальными условиями.

Вариант 2

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, используя: а) признаки сравнения; б) признаки Д'Аламбера, Коши или интегральный признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n(n+1)(n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{3}{n}$.

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(x-1)^n}{n(n+3)}$

Задание 3. Разложить функцию $y=\ln(4x+2)$ в ряд Маклорена, используя известные разложения. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 4. Разложить функцию $y = x - 1$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,1]$, продолжив её нечётным образом на отрезок $[-1,1]$.

Задание 5. Исследовать функцию $w = z \cdot \bar{z} - z \cdot \operatorname{Im} z$ на дифференцируемость и аналитичность и найти её производную, если она существует.

Задание 6. Найти все значения $\operatorname{Ln}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Задание 7. Вычислить интеграл, используя: а) теорему или интегральную формулу Коши; б) теоремы о вычетах (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^{2z+3}}{z} dz$; б) $\oint\limits_{|z+i|=4} \dfrac{2z+3}{z^2+1} dz$.

Задание 8. Методами операционного исчисления решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 4y - 4x = 0$ с нулевыми начальными условиями.

Вариант 3

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, используя:
а) признаки сравнения; б) признаки Д’Аламбера, Коши или интегральный признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n - \sqrt{n}}{n^2 - n + 1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$.

Задание 3. Разложить функцию $y = \sqrt[3]{8 + x^2}$ в ряд Маклорена, используя известные разложения. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 4. Разложить функцию $y = 2x - 1$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,2]$, продолжив её нечётным образом на отрезок $[-2,2]$.

Задание 5. Исследовать функцию $w = \dfrac{\operatorname{Re} z}{\bar{z}}$ на дифференцируемость и аналитичность и найти её производную, если она существует.

Задание 6. Найти все значения $\ln i$.

Задание 7. Вычислить интеграл, используя: а) теорему или интегральную формулу Коши; б) теоремы о вычетах (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_{|z-3|=1} \dfrac{\cos z}{z^2+1} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=6} \dfrac{z^2+1}{z^2(z-5)} dz$.

Задание 8. Методами операционного исчисления решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 4y + \sin x = 0$ с нулевыми начальными условиями.

Вариант 4

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, используя: а) признаки сравнения; б) признаки Д’Аламбера, Коши или интегральный признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(2n-1)}$.

Задание 3. Разложить функцию $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ в ряд Маклорена, используя известные разложения. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 4. Разложить функцию $y=2-x$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,2]$, продолжив её нечётным образом на отрезок $[-2,2]$.

Задание 5. Исследовать функцию $w=\frac{\operatorname{Im} z}{z\cdot\bar{z}}$ на дифференцируемость и аналитичность и найти её производную, если она существует.

Задание 6. Найти все значения $\sin(i-2)$.

Задание 7. Вычислить интеграл, используя: а) теорему или интегральную формулу Коши; б) теоремы о вычетах (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_{|z+2i|=1}\frac{z^3+z}{z+2i}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=5}\frac{e^{2z}}{z(z-2)^2}dz$.

Задание 8. Методами операционного исчисления решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y''-4y'-5y-6=0$ с нулевыми начальными условиями.

Вариант 5

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, используя: а) признаки сравнения; б) признаки Д’Аламбера, Коши или интегральный признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10}{(n+3)\cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$.

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n}(x+1)^n$.

Задание 3. Разложить функцию $y=x\ln\sqrt{1-2x}$ в ряд Маклорена, используя известные разложения. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 4. Разложить функцию $y = 1 - 2x$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,1]$, продолжив её нечётным образом на отрезок $[-1,1]$.

Задание 5. Исследовать функцию $w = z + \operatorname{Im} z$ на дифференцируемость и аналитичность и найти её производную, если она существует.

Задание 6. Найти все значения 2^i.

Задание 7. Вычислить интеграл, используя: а) теорему или интегральную формулу Коши; б) теоремы о вычетах (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{ch} z}{z+2} dz$; б) $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{z^3 + 2}{z^2 (z+1)} dz$.

Задание 8. Методами операционного исчисления решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y + e^{2t} = 0$ с нулевыми начальными условиями.

Вариант 6

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, используя:
а) признаки сравнения; б) признаки Д'Аламбера, Коши или интегральный признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 \sqrt{n} - 3n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(2n)}$.

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^n \sqrt{3n+1}}$.

Задание 3. Разложить функцию $y = x^2 \cos \frac{x}{2}$ в ряд Маклорена, используя известные разложения. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 4. Разложить функцию $y = 1 - \frac{x}{2}$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0,2]$, продолжив её чётным образом на отрезок $[-2,2]$.

Задание 5. Исследовать функцию $w = (\operatorname{Re} z)^2$ на дифференцируемость и аналитичность и найти её производную, если она существует.

Задание 6. Найти все значения $\operatorname{ch}(2 - 3i)$.

Задание 7. Вычислить интеграл, используя: а) теорему или интегральную формулу Коши; б) теоремы о вычетах (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_{|z|=5} \frac{z^2 + 2z + 2}{z+4} dz$; б) $\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{\cos \pi z}{z (z+i)^2} dz$.

Задание 8. Методами операционного исчисления решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 4y + 5 = 0$ с нулевыми начальными условиями.

Вариант 7

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, используя: а) признаки сравнения; б) признаки Д'Аламбера, Коши или интегральный признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^n\sqrt{n^2+5}}$.

Задание 3. Разложить функцию $y=\frac{1}{x^2-4}$ в ряд Маклорена, используя известные разложения. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 4. Разложить функцию $y=\pi+2x$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0,\pi]$, продолжив её чётным образом на отрезок $[-\pi,\pi]$.

Задание 5. Исследовать функцию $w=\bar{z}+z^2$ на дифференцируемость и аналитичность и найти её производную, если она существует.

Задание 6. Найти все значения $\mathrm{Ln}\,2$.

Задание 7. Вычислить интеграл, используя: а) теорему или интегральную формулу Коши; б) теоремы о вычетах (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{2z+5}{z+4}dz$; б) $\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{\sin z}{(z-1)(z-3)}dz$.

Задание 8. Методами операционного исчисления решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y''-5y'+6y-7x=0$ с нулевыми начальными условиями.

Вариант 8

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, используя: а) признаки сравнения; б) признаки Д'Аламбера, Коши или интегральный признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2-\sin\frac{\pi n}{4}}{9n-2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n^2+1)\cdot 5^n}$.

Задание 3. Разложить функцию $y=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$ в ряд Маклорена, используя известные разложения. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 4. Разложить функцию $y = x - 3$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $\left[0,3\right]$, продолжив её чётным образом на отрезок $\left[-3,3\right]$.

Задание 5. Исследовать функцию $w = 2z^2 - 3iz$ на дифференцируемость и аналитичность и найти её производную, если она существует.

Задание 6. Найти все значения $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^i$.

Задание 7. Вычислить интеграл, используя: а) теорему или интегральную формулу Коши; б) теоремы о вычетах (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_{|z+1|=1} \dfrac{\cos \pi z}{z+1}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=6} \dfrac{z^2 + z}{z^2\left(z-3\right)}dz$.

Задание 8. Методами операционного исчисления решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y + 2\cos x = 0$ с нулевыми начальными условиями.

Вариант 9

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, используя:
а) признаки сравнения; б) признаки Д'Аламбера, Коши или интегральный признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n^2+1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{n \cdot 3^n}$.

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \dfrac{1}{3^n}$.

Задание 3. Разложить функцию $y = \dfrac{\ln \sqrt[3]{1+2x^2}}{x}$ в ряд Маклорена, используя известные разложения. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 4. Разложить функцию $y = 2x - 3$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $\left[0,\pi\right]$, продолжив её чётным образом на отрезок $\left[-\pi,\pi\right]$.

Задание 5. Исследовать функцию $w = \operatorname{Re}\left(z^2 - i\bar{z}\right) + z$ на дифференцируемость и аналитичность и найти её производную, если она существует.

Задание 6. Найти все значения $\operatorname{Ln}\left(1+i\right)$.

Задание 7. Вычислить интеграл, используя: а) теорему или интегральную формулу Коши; б) теоремы о вычетах (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_{|z-2|=2} \dfrac{3z^2 - 2z + 1}{z+2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=5} \dfrac{\cos z}{2z\left(z+4\right)}dz$.

Задание 8. Методами операционного исчисления решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y'' + y' + 5y - 10 = 0$ с нулевыми начальными условиями.

Вариант 10

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, используя:
а) признаки сравнения; б) признаки Д'Аламбера, Коши или интегральный признак Коши:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{5n^4 - n^2 + n - 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{n}{3}$.

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-1)^n}{n^3+1}$.

Задание 3. Разложить функцию $y = \sqrt{4+x^2}$ в ряд Маклорена, используя известные разложения. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 4. Разложить функцию $y = 2x+1$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0,2]$, продолжив её чётным образом на отрезок $[-2,2]$.

Задание 5. Исследовать функцию $w = \frac{2z - \bar{z}}{\operatorname{Im} z^2}$ на дифференцируемость и аналитичность и найти её производную, если она существует.

Задание 6. Найти все значения 1^{3+4i}.

Задание 7. Вычислить интеграл, используя: а) теорему или интегральную формулу Коши; б) теоремы о вычетах (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh}(3z+1)}{z+1} dz$; б) $\oint\limits_{|z+2|=4} \frac{e^{-2z}}{(z-1)^2 (z+2)} dz$.

Задание 8. Методами операционного исчисления решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y - 4x = 0$ с нулевыми начальными условиями.

Список литературы

1 **Виноградова, И. А.** Задачи и упражнения по математическому анализу: Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы: учеб. пособие / Под ред. В. А. Садовничего. – М. : Высш. шк., 2000. – 712 с.

2 Высшая математика: Общий курс: учебник / Под ред. С. А. Самаля. – Минск : Выш. шк., 2000. – 351 с.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2003. – Т. 1. – 544 с.

4 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2004. – Т. 2. – 448 с.

5 **Гусак, А. А.** Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 5-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2004. – 640 с.

6 Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – Т. 2. – 368 с.

7 **Шипачев, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев. – 7-е изд. – М. : Высш. шк., 2005. – 479 с.