

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Варианты заданий к контрольной работе №2
для студентов заочной формы обучения специальности 1-53 01 02
«Автоматизированные системы обработки информации»



Могилев 2007

УДК 51
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой высшей математики 7 марта 2007 г., протокол № 6

Составители: В. Г. Замураев;
Т. Ю. Орлова;
С. Ф. Плешкунова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Л. В. Плетнёв

Методические указания предназначены для самостоятельной подготовки студентов заочной формы обучения специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации».

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнёв
Технический редактор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	В. Э. Ковалевский

Подписано в печать . Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ №02330/375 от 29.06.2004 г.
212005, г. Могилев, пр. Мира, 43

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет», 2007

1 Программа курса

Тема 1. Интегральное исчисление функций одной переменной.

Первообразная функция. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица основных неопределённых интегралов. Замена переменной в неопределённом интеграле и интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические и некоторые иррациональные функции. Понятие определённого интеграла. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменной в определённом интеграле. Формула интегрирования по частям определённого интеграла. Геометрические и физические приложения определённых интегралов. Несобственные интегралы первого и второго рода.

Тема 2. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных.

Функции многих переменных (ФМП). Частные производные ФМП. Дифференциал ФМП и его связь с частными производными. Производная по направлению ФМП и градиент. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Понятие экстремума ФМП. Необходимое и достаточное условия экстремума. Условный экстремум: метод множителей Лагранжа. Определение двойного интеграла и его свойства. Геометрический и физический смысл двойного интеграла. Вычисление двойных интегралов в декартовой системе координат. Тройной интеграл. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Криволинейные и поверхностные интегралы.

Тема 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ). Общее и частное решение ДУ. ДУ 1-го порядка. Задача Коши для ДУ первого порядка. Примеры ДУ первого порядка, интегрируемых в квадратурах: с разделяющимися переменными; однородные; в полных дифференциалах; линейное; Бернулли. Общие понятия о ДУ высших порядков. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные ДУ высших порядков, свойства их решений. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами. Линейное неоднородное ДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

2 Общие требования к оформлению контрольной работы

2.1 Выбор варианта заданий

Номер варианта заданий равен последней цифре номера зачётной книжки. Если же последняя цифра – ноль, то следует выполнять задания варианта номер 10.

2.2 Правила оформления контрольной работы

Работа оформляется в отдельной тонкой тетради в обычную клетку.

На обложке тетради указывается название дисциплины; номер группы и название факультета; фамилия, имя, отчество, номер зачётной книжки; обратный адрес; номер варианта заданий.

Решения заданий приводятся в порядке, установленном в вариантах заданий.

Перед каждым решением указывается номер задания и его полное условие.

Решения приводятся с необходимыми краткими пояснениями, записываются крупным и разборчивым почерком. Чертежи выполняются простым карандашом.

Оформление каждого задания начинается с новой страницы.

В конце работы приводится список литературы, использованной при решении заданий.

Незачтённые работы не оформляются заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводятся в конце работы.

При несоблюдении хотя бы одного из указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированную и зачтённую контрольную работу вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтённой контрольной работы студент не допускается к сдаче экзамена.

3 Варианты контрольных заданий

Вариант 1

Задание 1. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{1 + \cos x}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$ или доказать его расходимость.

Задание 4. Найти направление, в котором функция $u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz^2$ возрастает в точке $M(1, 1, 1)$ быстрее всего.

Задание 5. Найти экстремум функции $z = x - 3y + 5$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 42 = 0$.

Задание 6. Вычислить $\iint_D x dx dy$, где область D ограничена линиями $y = x^2 + 1$, $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, $x = 2$.

Задание 7. Вычислить $\iiint_D x dx dy dz$, где область D ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 5$, $z = 0$.

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L от точки A до точки B :

$$\int_L (x^2 + 2y) dx + (y^2 + 2x) dy, \text{ где } L: y = 2 - \frac{x^2}{8}, A(-4, 0), B(0, 2).$$

Задание 9. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$x^3 y' = y(x^2 + y^2), y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x.$$

Вариант 2

Задание 1. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Задание 2. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $0 \leq x \leq \frac{7}{9}$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx$ или доказать его расходимость.

Задание 4. Найти направление, в котором функция $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$ возрастает в точке $M(2, 4, 4)$ быстрее всего.

Задание 5. Найти экстремум функции $z = 2x + y - 3$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 - 6x + 14y + 53 = 0$.

Задание 6. Вычислить $\iint_D y dx dy$, где область D ограничена линиями $y = \cos x$, $x = 0$, $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$.

Задание 7. Вычислить $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, где область D ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L от точки A до точки B :

$$\int_L x^2 y dx - y dy, \text{ где } L: \text{отрезок } AB, A(-1, 0), B(0, 1).$$

Задание 9. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$xy' = y \ln \frac{x}{y}, y(1) = 1.$$

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}.$$

Вариант 3

Задание 1. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^3$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ или доказать его расходимость.

Задание 4. Найти направление, в котором функция $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$ возрастает в точке $M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$ быстрее всего.

Задание 5. Найти экстремум функции $z = x - 4y + 2$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 12 = 0$.

Задание 6. Вычислить $\iint_D x dx dy$, где область D ограничена линиями $y = \lg x$, $x = 10$, $y = 0$.

Задание 7. Вычислить $\iiint_D y dx dy dz$, где область D ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 3$, $z = 0$.

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L от точки A до точки B :

$$\int_L (x + y) dx + (x - y) dy, \text{ где } L: y = x^2, A(-1, 1), B(1, 1).$$

Задание 9. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}, y(1) = 1.$$

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$$

Вариант 4

Задание 1. Найти неопределённый интеграл $\int e^x \cos 2x dx$.

Задание 2. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \ln \cos x + 2$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ или доказать его расходимость.

Задание 4. Найти направление, в котором функция $u = xz^2 - \sqrt{x^3 y}$ возрастает в точке $M(2, 2, 4)$ быстрее всего.

Задание 5. Найти экстремум функции $z = -x + 2y - 6$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 35 = 0$.

Задание 6. Вычислить $\iint_D x dx dy$, где область D ограничена линиями $y = \arctg x$, $x = -\sqrt{3}$, $y = 0$.

Задание 7. Вычислить $\iiint_D dx dy dz$, где область D ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L от точки A до точки B :

$$\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy, \text{ где } L: y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}, A(2, 0), B(0, 0).$$

Задание 9. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$\left(y + \frac{2}{x^2} \right) dx + \left(x - \frac{3}{y^2} \right) dy = 0, \quad y(1) = 1.$$

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = \sin x.$$

Вариант 5

Задание 1. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$.

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x\sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 3$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\ln^2(x-1)}{x-1} dx$ или доказать его расходимость.

Задание 4. Найти направление, в котором функция $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + xz$ возрастает в точке $M(2, 2, -1)$ быстрее всего.

Задание 5. Найти экстремум функции $z = 3x - 2y + 7$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 13 = 0$.

Задание 6. Вычислить $\iint_D y dx dy$, где область D ограничена линиями $y = 3^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Задание 7. Вычислить $\iiint_D z dx dy dz$, где область D ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 7$, $z = 0$.

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L от точки A до точки B :

$$\int_L (x^2 + y^2) dx + y^2 dy, \text{ где } L: \text{отрезок } AB, A(2, 0), B(0, 2).$$

Задание 9. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$(2x - ye^{-x}) dx + e^{-x} dy = 0, y(0) = 1.$$

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65.$$

Вариант 6

Задание 1. Найти неопределённый интеграл $\int x^3 e^{-2x^2} dx$.

Задание 2. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5$, $\frac{1}{9} \leq x \leq 1$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{81 dx}{(2x+3)^5}$ или доказать его расходимость.

Задание 4. Найти направление, в котором функция $u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}$ возрастает в точке $M(3, 0, -4)$ быстрее всего.

Задание 5. Найти экстремум функции $z = 2x - y - 5$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$.

Задание 6. Вычислить $\iint_D (x + y) dx dy$, где область D ограничена линиями $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

Задание 7. Вычислить $\iiint_D x dx dy dz$, где область D ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 7$.

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L от точки A до точки B :

$$\int_L (xy - y^2) dx + x dy, \text{ где } L: y = 2x^2, A(0, 0), B(1, 2).$$

Задание 9. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0, y(0) = 0.$$

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6.$$

Вариант 7

Задание 1. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{x+1}{x(x^2+3)} dx$.

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x \sin^2 x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ или доказать его расходимость.

Задание 4. Найти направление, в котором функция $u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}$ возрастает в точке $M(1,1,-2)$ быстрее всего.

Задание 5. Найти экстремум функции $z = -2x + 3y + 1$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 + 2x - 14y + 37 = 0$.

Задание 6. Вычислить $\iint_D x dx dy$, где область D ограничена линиями $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

Задание 7. Вычислить $\iiint_D dx dy dz$, где область D ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 5$, $z = 0$.

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L от точки A до точки B :

$$\int_L (xy - x) dx + \frac{x^2}{2} dy, \text{ где } L: y = 2\sqrt{x}, A(0,0), B(1,2).$$

Задание 9. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1, y(1) = 2.$$

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 16y = 32e^{4x}.$$

Вариант 8

Задание 1. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - \cos^2 x}$.

Задание 2. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{4 - 3x - x^2}$ или доказать его расходимость.

Задание 4. Найти направление, в котором функция $u = 2\sqrt{x+y} + y \operatorname{arctg} z$ возрастает в точке $M(3, 2, -1)$ быстрее всего.

Задание 5. Найти экстремум функции $z = x - 5y - 5$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 1 = 0$.

Задание 6. Вычислить $\iint_D y dx dy$, где область D ограничена линиями $y = |x|$, $y = 3$.

Задание 7. Вычислить $\iiint_D y dx dy dz$, где область D ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 11$.

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L от точки A до точки B :

$$\int_L -y dx + x dy, \text{ где } L: y = x^3, A(0, 0), B(2, 8).$$

Задание 9. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$xy' = y + x^2 \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y = 8e^{2x}.$$

Вариант 9

Задание 1. Найти неопределённый интеграл $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$,

$$y = 0, x = 1.$$

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ или доказать его расходимость.

Задание 4. Найти направление, в котором функция $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ возрастает в точке $M(1, -3, 4)$ быстрее всего.

Задание 5. Найти экстремум функции $z = 2x - 4y + 7$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 12 = 0$.

Задание 6. Вычислить $\iint_D x dx dy$, где область D ограничена линиями $y = 3 - x^2$, $y = 0$.

Задание 7. Вычислить $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, где область D ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L от точки A до точки B :

$$\int_L xy dx, \text{ где } L: y = \sin x, A(\pi, 0), B(0, 0).$$

Задание 9. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y' = \frac{2y}{x+1} + e^x (x+1)^2, y(0) = 1.$$

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1.$$

Вариант 10

Задание 1. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4} dx$.

Задание 2. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3$, $0 \leq x \leq 2$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$ или доказать его расходимость.

Задание 4. Найти направление, в котором функция $u = z^2 + 2 \operatorname{arctg}(x - y)$ возрастает в точке $M(1, 2, -1)$ быстрее всего.

Задание 5. Найти экстремум функции $z = 3x - y - 9$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 16 = 0$.

Задание 6. Вычислить $\iint_D x dx dy$, где область D ограничена линиями $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

Задание 7. Вычислить $\iiint_D z dx dy dz$, где область D ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 7$.

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L от точки A до точки B :

$$\int_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy, \text{ где } L: \text{отрезок } AB, A(1, 0), B(0, 1).$$

Задание 9. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 2.$$

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x.$$