ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты индивидуальных заданий для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения

РЯДЫ

Могилев 2011

УДК 517
ББК 22.1я 73
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» января 2011 г., протокол № 8

Составители: канд. физ.- мат. наук, доц. В. В. Пугин;
ст. преподаватель А. Г. Козлов

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. К. Крутолевич

В методических указаниях изложены теоретические сведения, образцы решения задач и варианты индивидуальных заданий по разделу «Ряды» для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнёв
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная вёрстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать 13.12.2011 . Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1.86 . Уч.-изд. л. 1.7 . Тираж 165 экз. Заказ № 845.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/0548519 от 16.06.2009.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилёв.

Введение

Методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения для организации системного изучения раздела «Ряды» курса «Высшая математика», овладения основными методами и приемами решения задач по этой теме.

Первая часть методических указаний содержит: числовые ряды с положительными членами, знакопеременные ряды, функциональные ряды, степенные ряды, применение степенных рядов к вычислению определенных интегралов и решению дифференциальных уравнений.

В начале каждой из тем содержатся основные теоретические положения и формулы, на основании которых приведены алгоритмы решения типовых задач.

Вторая часть – индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов.

После изучения темы студенту выдается индивидуальное задание. Работу проверяет преподаватель и проводит собеседование по теме «Ряды».

1 Ряды. Основные теоретические сведения

Определение 1. Рядом называется выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \, , \qquad (1)$$

где $\{u_n\}$ – последовательность чисел или функций.

Каждое слагаемое выражения (1) называется членом ряда, u_n – n-й или общий член ряда. Если все члены ряда – числа, то ряд называется числовым; если члены ряда – функции, то функциональным.

2 Числовые ряды

2.1 Основные понятия и определения

2.1.1 Сходимость и расходимость рядов.

Числовой ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2)$$

считается заданным, если известен $u_n = f(n)$.

Определение 1. Сумма $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ первых n членов ряда называется n-й частичной суммой ряда (2).

Определение 2. Конечный предел последовательности сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ называется суммой ряда.

Определение 3. Ряд называется сходящимся, если $\lim\limits_{x\to\infty} S_n = S$, и расходящимся, если этот предел не существует.

Ряд

$$r_k = u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \ldots = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n \qquad (3)$$

называется остатком ряда (2) после k-го члена или k-м остатком ряда.

Пример 1 – Ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \qquad (4)$$

называется геометрическим рядом.

Для него $S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \dfrac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}$, как сумма n членов геометрической прогрессии.

Ряд (4) сходится при $|q|<1$, его сумма $S=\dfrac{a}{1-q}$ и расходится при $|q|\geq 1$.

Пример 2 – Ряд Дирихле

$$\frac{1}{1^{\alpha}}+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}, \qquad (5)$$

$\alpha\in R$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leq 1$.

Например, при $\alpha=1$ имеем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, который является расходящимся числовым рядом.

Пример 3 – Записать три члена ряда по заданному общему члену $u_n=\dfrac{2n-1}{3^n}$.

Решение

Члены ряда $u_1=\dfrac{2\cdot 1-1}{3^1}=\dfrac{1}{3}$, $u_2=\dfrac{2\cdot 2-1}{3^2}=\dfrac{3}{3^2}$, $u_3=\dfrac{2\cdot 3-1}{3^3}=\dfrac{5}{27}$.

Такой числовой ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^4}+\frac{7}{3^4}+\frac{9}{3^5}+\ldots+\frac{2n-1}{3^n}+\ldots.$$

Пример 4 – Написать простейшую формулу n члена ряда $\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{16}+\dfrac{6}{25}+\ldots$.

Решение

$$u_1=\frac{1+2}{(1+1)^2},\ u_2=\frac{2+2}{(2+1)^2},\ u_3=\frac{3+2}{(3+1)^2},\ \ldots,\ u_n=\frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

Тогда $\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{16}+\dfrac{6}{25}+\ldots+\dfrac{n+2}{(n+1)^2}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{(n+1)^2}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2}$ – три формы записи числового ряда.

Пример 5 – Найти сумму S_n первых n членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ и, пользуясь непосредственно определением, выяснить сходимость ряда, найти его сумму.

Решение

Давая n последовательно значения 1, 2, 3,…, получим

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Разложим $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$ на простейшие дроби с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Тогда

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Найдем

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится по определению и его сумма равна единице.

2.1.2 Свойства числовых рядов.

1 Сходимость и расходимость ряда не нарушится, если переставить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2 Если ряд (2) сходится и имеет сумму S, то ряд $cu_1+cu_2+cu_3+\ldots+cu_n+\ldots$, где c – заданное число,

также сходится и его сумма равна cS.

3 Если ряд (2) и ряд

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}v_n \qquad (6)$$

сходятся и имеют суммы S и S_1 соответственно, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$$

сходятся и их суммы будут $S\pm S_1$ соответственно.

Следствие свойства 1. Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (4). Обратно, если сходится ряд (4), то сходится и ряд (2).

2.1.3 Необходимое условие сходимости ряда.

Теорема. Если ряд (2) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд (2) расходится.

Это – достаточное условие расходимости ряда (2).

Пример 6 – Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^2}$.

Решение

Установим выполнение необходимых условий сходимости рядов.

а) предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, необходимое условие сходимости числового ряда выполняется. Найдем S как сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{3}{4} = 0,75$. Имеем $S = \frac{0,75}{1-0,75} = 3$, следовательно, ряд сходится и его сумма $S = 3$.

б) предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2} = 0$, необходимое условие сходимости числового ряда выполняется. Определим, сходится ли ряд.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сумма двух рядов. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический расходящийся. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле при $\alpha = 2$). Сумма расходящегося и сходящегося рядов есть расходящийся ряд.

в) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^2}$ расходится, т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n^2} = 1 \neq 0$, т. е. не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

2.2 Числовые ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости

Рассмотрим числовые ряды (2) и (7).

Признак сравнения. Если для $\forall n \geq n_0$ $u_n \leq v_n$ $\left(u_n \geq v_n\right)$ и ряд (6) сходится (расходится), то сходится (расходится) и ряд (2).

Предельный признак сравнения. Пусть члены рядов (2) и (6) положительны и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = q > 0,\quad q \neq \infty$, то ряды (2) и (7) сходятся и расходятся одновременно.

Пример 7 – Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n+1}$.

Решение

а) сравним ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$$

с рядом геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Поскольку $\dfrac{1}{n\cdot 2^n}<\dfrac{1}{2^n}$, а ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{1}{2}$ сходится, то на основании признака сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$.

б) сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n+1}$ с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ и найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3n+1}:\frac{1}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}>0.$$

Так как гармонический ряд расходится, то на основании предельного признака сравнения расходится и исследуемый ряд.

Признак Д'Аламбера. Если для ряда (2) существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то ряд (2) сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$.

Радикальный признак Коши. Если для ряда (2) существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то ряд (2) сходится при $q<1$ и при $q>1$ расходится.

Замечание – Если $q=1$, то ни признак Д'Аламбера, ни признак Коши не решают вопрос сходимости ряда.

Интегральный признак Коши-Маклорена. Если $f(x)$ – неотрицательная невозрастающая функция при $x>0$, то ряд

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

и интеграл $I=\int\limits_1^{\infty}f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 8 – Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^{n+2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{7^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\sqrt[3]{n}}}{3\sqrt[3]{n^2}}$.

Решение

а) используем признак Д'Аламбера

$$u_n=\frac{(n+1)!}{3^{n+2}};\ u_{n+1}=\frac{(n+2)!}{3^{n+3}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\,3^{n+2}}{3^{n+3}\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3}=\infty>1$$

числовой ряд расходится.

б) с помощью радикального признака Коши: определим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{7^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{n+3}{n+1}\right)=\frac{1}{7}<1$$

числовой ряд сходится.

в) применим интегральный признак Коши-Маклорена. Найдем функцию $f(x)$ по общему члену ряда – $f(x)=\frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt[3]{x} = t, & dt = \dfrac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ t_1 = 1, & t_2 = \sqrt[3]{b} \end{matrix} \right| = \lim_{b\to\infty}\int_1^{\sqrt[3]{b}} e^t dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^t \Big|_1^{\sqrt[3]{b}} = \lim_{b\to\infty}\left(e^{\sqrt[3]{b}} - e^1\right) = \infty .$$

Интеграл расходится, следовательно, и ряд расходится.

2.3 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Числовой ряд, среди членов которого есть положительные и отрицательные числа, называется знакопеременным. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \tag{7}$$

сходится, если ряд, составленный из модулей его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = |b_1| + |b_2| + |b_3| + \ldots + |b_n| + \ldots \tag{8}$$

сходится, и ряд (7) называется абсолютно сходящимся.

Если ряд (7) сходится, а ряд (8) расходится, то ряд (7) называется условно (неабсолютно) сходящимся.

Ряд

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n+1} b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, \quad b_n > 0, \tag{9}$$

у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется знакочередующимся рядом.

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд (9) сходится, если выполнены условия

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \text{ и } b_n > b_{n+1} \text{ (n = 1, 2, 3, …)}. \tag{10}$$

Погрешность

$$|r_n| \le b_{n+1}, \ |S - S_n| \le |r_n| \le |b_{n+1}| . \tag{11}$$

при замене суммы S сходящегося по признаку Лейбница знакочередующегося ряда его частичной суммой S_n не превышает модуля первого из отброшенных членов.

Пример 9 – Исследовать сходимость знакопеременного ряда

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

Решение

Составленный ряд $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ из абсолютных величин членов данного ряда сходится, как ряд Дирихле при $\alpha=2>1$. Значит, абсолютно сходится исходный ряд.

Пример 10 – Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{9^n}{n!}$.

Решение

Имеем знакочередующийся ряд.

По признаку Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9^{n+1}n!}{(n+1)!9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{n+1}=0<1,$$

т.е. исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 11 – Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

Решение

Ряд $\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}-\frac{1}{9!}+\frac{1}{11!}-\frac{1}{13!}+\ldots$ знакочередующийся, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница

$$\frac{1}{3!}>\frac{1}{5!}>\frac{1}{7!}>\ldots>\frac{1}{2n+1}>\ldots,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=0.$$

Определим число членов ряда, необходимое для вычисления суммы с точностью 0,001. Получаем по формуле (11) оценку для остатка ряда

$$|r_2|<\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}<0,001$$

и, следовательно, с точностью до 0,001

$$S=\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}=\frac{1}{6}-\frac{1}{120}\approx 0,1583.$$

3 Функциональные ряды

3.1 Основные понятия и определения. Сходимость, область сходимости, абсолютная сходимость, мажоранта

Функциональным рядом называется ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \qquad (12)$$

где $u_n(x)$ – функции, определенные на некотором множестве X.

При $x=x_0\in X$ функциональный ряд превращается в числовой ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0). \qquad (13)$$

Если ряд (13) сходится, то x_0 – точка сходимости ряда (12). Совокупность всех точек сходимости ряда (12) называется областью его сходимости и её обозначают D.

Функция $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)$ – частичная сумма ряда (12); функция $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+u_{n+3}(x)+\ldots=\sum_{i=n+1}^{\infty}u_i(x)$ – остаток ряда (12).

Сумма ряда (12) – функция $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x), \quad x\in D$.

Для сходящегося ряда $S(x)=S_n(x)+r_n(x)$ при $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ абсолютно сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n(x)\right|$.

Для определения области абсолютной сходимости ряда (12), считая x фиксированным, используют достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов – сравнения, Д'Аламбера и радикальный признак Коши.

Функциональный ряд (12) называется мажорируемым сходящимся функциональным рядом

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (14)$$

с положительными членами и для $\forall x$ из области изменения

$$\left|u_1(x)\right|\le a_1,\ \left|u_2(x)\right|\le a_2,\ \left|u_3(x)\right|\le a_3,\ \ldots,\ \left|u_n(x)\right|\le a_n.$$

Ряд (14) называется мажорантой функционального ряда (13).

Пример 12 – Определить область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+x^2}$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$;

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+\sin x}$.

Решение

а) ряд $\dfrac{1}{1^x}+\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{3^x}+...+\dfrac{1}{n^x}+...$ сходится, как ряд Дирихле при $x>1$, и расходится при $x\le 1$.

б) члены функционального ряда $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{4+x^2}+\dfrac{1}{9+x^2}+...+\dfrac{1}{n^2+x^2}+...$ при любом $x\ne 0$ меньше соответствующих членов ряда $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+...+\dfrac{1}{n^2}+...$, сходящегося, как ряд Дирихле при $\alpha=2>1$. Поэтому должен сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+x^2}$ при любом x. Область сходимости этого ряда $D=\{R\}$.

в) в ряде $\dfrac{1}{0!}+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+...$ при любом x

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|n!x^{n+1}\right|}{\left|(n+1)!x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0\cdot|x|<1.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ сходится, согласно признаку Д’Аламбера, при любом x, причем абсолютно.

г) функциональный ряд

$$0!+1!x+2!x^2+3!x^3+...+n!x^n+...$$

расходится при любом $x\ne 0$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(n+1)!x^{n+1}\right|}{\left|n!x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}(n+1)|x|=\infty\cdot|x|>1.$$

Поэтому область $D=\{0\}$.

д) рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2+\sin x}+\frac{1}{3+\sin x}+\frac{1}{4+\sin x}+...+\frac{1}{n+1+\sin x}+...$$

Так как $|\sin x|\le 1$, то члены этого ряда не меньше соответствующих членов расходящегося гармонического ряда, начиная с третьего члена, т. е.

$$\frac{1}{3+\sin x}\ge\frac{1}{4},\ \frac{1}{4+\sin x}\ge\frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{n+\sin x}\ge\frac{1}{n+1},\ \ldots$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sin x}$ расходится, т.е. область сходимости $D=\{\varnothing\}$.

3.2 Степенные ряды

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \quad (15)$$

где $a_n\ (n=0,1,2,...)$ – постоянные, называемые коэффициентами ряда.

При $x_0=0$ степенной ряд имеет вид:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ . \quad (16)$$

Степенной ряд (16) всегда сходится в точке $x=0$, а ряд (15) – в точке $x=x_0$. Ряд (16) называется рядом, расположенным по степеням x, а ряд (15) – по степеням $x-x_0$.

Теорема Абеля: если степенной ряд (16) сходится при $x=a\ne 0$, то он сходится абсолютно при $\forall x\in|x|<|a|$. Если же ряд (16) расходится при $x=a_1$, то он расходится при $\forall x\in|x|>|a_1|$.

Радиусом сходимости ряда (16) называется число $R>0$, такое, что при $|x|<R$ ряд сходится, а при $|x|>R$ расходится. Интервал $(-R,R)$ – интервал сходимости ряда. Если степенной ряд (16) сходится на всей числовой оси, то $R=\infty$; если ряд сходится только при $x=0$, то $R=0$.

Радиус сходимости можно вычислить по одной из формул:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{или} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Этими формулами выражается и радиус сходимости ряда (15); интервал сходимости этого ряда – $(x_0 - R, x_0 + R)$.

На концах интервала сходимости при $x = -R$, $x = R$ вопрос сходимости решается для каждого ряда отдельно. Следовательно, областью сходимости степенного ряда (16) является интервал сходимости $(-R, R)$ с возможностью присоединения одной или двух точек $x = \pm R$ в зависимости от того, сходится ли числовой ряд в этих точках.

Степенной ряд (16), мажорируемый на любом $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$ и на этом отрезке его, можно почленно дифференцировать и интегрировать, при этом полученный степенной ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Пример 13 – Найти области сходимости рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2 3^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

Решение

а) найдем радиус сходимости степенного ряда. Так как

$$a_n = \frac{1}{n^2 3^{n-1}},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 3^n},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 3^n}{3^{n-1} n^2}\right| = 3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 3.$$

Следовательно, $(-3, 3)$ – интервал сходимости.

Исследуем поведение ряда при $x = -3$ и $x = 3$. При $x = -3$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{3}{n^2}$ сходится по признаку Лейбница; при $x = 3$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{n^2}$ сходится, как ряд Дирихле при $\alpha = 2 > 1$.

Следовательно, область сходимости данного ряда – отрезок $[-3, 3]$.

б) Это ряд вида (15), где $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$, $x - x_0 = x + 1, x_0 = -1$. Сделаем замену $y = x + 1$. тогда исходный ряд примет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{\sqrt[3]{n+2}} \qquad (17).$$

Найдем его радиус и интервал сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt[3]{n+3}}{\sqrt[3]{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n+2}} \right| = 1,$$

т. е. $R = 1$ и $(-1; 1)$ – интервал сходимости.

Исследуем поведение (17) при $y = \pm 1$. При $y = -1$ – числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$ сходится по признаку Лейбница; при $y = 1$ – числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$ расходится по предельному признаку сравнения (с рядом Дирихле $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\alpha = \frac{1}{3} < 1$). Следовательно, областью сходимости ряда (18) является промежуток $[-1; 1)$. Тогда область сходимости исходного ряда $[-2; 0)$, так как из $-1 \le x + 1 < 1 \Rightarrow -2 \le x < 0$.

в) найдем радиус сходимости:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = 0.$$

Следовательно, область сходимости данного ряда – одна точка $x = 0$.

3.3 Ряды Тейлора и Маклорена

3.3.1 Разложение функций в степенные ряды. Если функция $f(x)$ в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 имеет производные любых порядков, то степенной ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (18)$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

Если $x_0 = 0$, то ряд

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (19)$$

называется рядом Маклорена для функции $f(x)$.

Для сходимости ряда Тейлора (18) к функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in U(x_0)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, где $R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $c = x_0+\Theta(x-x_0)$, $(0<\Theta<1)$; тогда и имеет место равенство

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (20)$$

Практически **достаточное условие разложения** функции в степенной ряд Тейлора выражается **теоремой**: если производные любого порядка функции $f(x)$ ограничены в $U(x_0)$ точки x_0 одним и тем же числом M $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$, $(n=1, 2, 3, \ldots)$, то ряд Тейлора этой функции сходится к функции $f(x)$ для $\forall x\in U(x_0)$ и это разложение единственно.

Разложение функций в степенные ряды применяют для вычисления приближенного значения функции, определенных интегралов, решения дифференциальных уравнений.

Пример 14 – Разложить функции в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$ и исследовать их сходимость:

а) $f(x)=3x^4-5x^3+2x^2-4x-2$, $x_0=1$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $x_0=-1$;

в) $f(x)=(1-x)e^{-x^2}$, $x_0=0$.

Решение

Вычислим значения $f(x)$ и её производных.

а) при $x_0=1$.

$$f(x)=3x^4-5x^3+2x^2-4x-2,\ f(1)=-6;$$

$$f'(x)=12x^3-15x^2+4x-4,\ \ f'(1)=-3;$$

$$f''(x)=36x^2-30x+4,\ f''(1)=10;\ \ f'''(x)=72x-30,\ f'''(1)=42;$$

$$f^{IV}(x)=72,\ f^{IV}(1)=72;\ \ f^{V}(x)=...=f^{(n)}(x)=0.$$

Все производные функции $f(x)$ в $U(x_0)$ $x_0=1$ ограничены числом $M=72$, значит, функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора по формуле (20)

$$3x^4-5x^3+2x^2-4x-2=-6-\frac{3}{1!}(x-1)+\frac{10}{2!}(x-1)^2+\frac{42}{3!}(x-1)^3+$$

$$+\frac{72}{4!}(x-1)^4+0=-6-3(x-1)+5(x-1)^2+7(x-1)^3+4(x-1)^4.$$

Полученный ряд сходится на всей числовой оси.

б) при $x_0=-1$.

$$f(x)=\frac{1}{x^3}=x^{-3},\ f(-1)=-1;\ \ f'(x)=-3x^{-4}=\frac{-3}{x^4},\ f'(-1)=-3;$$

$$f''(x)=-3(-4)x^{-5}=\frac{3\cdot4}{x^5},\ f''(-1)=-3\cdot4;$$

$$f'''(x)=-3\cdot4\cdot5x^{-6}=-\frac{3\cdot4\cdot5}{x^6},\ f'''(-1)=-3\cdot4\cdot5;$$

$$f^{IV}(x)=3\cdot4\cdot5\cdot6x^{-7}=\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{x^7},\ f^{IV}(-1)=-3\cdot4\cdot5\cdot6;$$

$$f^{V}(x)=-3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7x^{-8}=-\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{x^8},\ f^{V}(-1)=-3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7;$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{(n+2)!}{2!}x^{-(n+3)}=\frac{(-1)^n(n+2)!}{2!x^{n+3}},\ f^{(n)}(-1)=-\frac{(n+2)!}{2!}.$$

Составим ряд Тейлора для функции $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

$$\frac{1}{x^3}=-\left(1+\frac{3}{1!}(x+1)+\frac{3\cdot4}{2!}(x+1)^2+\frac{3\cdot4\cdot5}{3!}(x+1)^3+\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{4!}(x+1)^4+\right.$$

$$\left.+...+\frac{(n+2)!}{n!}(x+1)^n+...\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n!}(x+1)^n. \qquad (21)$$

Найдем радиус сходимости полученного ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-\frac{1}{2}\frac{(n+2)!}{n!}}{-\frac{1}{2}\frac{(n+3)!}{(n+1)!}}\right|==\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!(n+1)!}{(n+3)!n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+3}=1$$

интервал сходимости $|x+1|<1\Rightarrow -2<x<0$.

Рассмотрим при $x=-2$ и $x=0$ ряды $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)!}{n!}$ и $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n!}$. Они расходятся, т. к. необходимое условие сходимости числовых рядов не выполняется, т. е. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{n!}\neq 0$, $\Rightarrow$ ряд Тейлора (21) сходится к функции $f(x)=\frac{1}{x^3}$ при $-2<x<0$.

в) разложим функцию $f(x)=(1-x)e^{-x^2}$ в ряд Маклорена. Для этого в разложении функции e^x заменим x на $-x^2$. Получим

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots\ (-\infty<x<\infty).$$

Двучлен $1-x$ сходится на всей числовой оси. Умножив двучлен на ряд Маклорена для e^{-x^2}, получим разложение функции в ряд

$$(1-x)e^{-x^2}=(1-x)\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots\right)=$$

$$1-x-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^5}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^7}{3!}+\ldots,$$

сходящийся к данной функции на всей числовой оси.

3.4 Применение степенных рядов.

3.4.1 Вычисление определенных интегралов. Определенные интегралы $\int_a^b f(x)dx$, первообразные для которых не выражаются в конечном виде через элементарные функции, удобно вычислять с помощью рядов: раскладывают $f(x)$ в степенной ряд Маклорена и, используя теорему об интегрировании степенных рядов, вычисляют интеграл с любой степенью точности при любом x из интервала сходимости полученного ряда.

Пример 15 – Вычислить $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,0001.

Решение

Неопределенный интеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$ – «неберущийся». Воспользуемся формулой разложения функции $\sin x$ в ряд Маклорена.

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \right) dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ... \right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - ... \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{144} + \frac{1}{19200} - .... .$$

Так как $\frac{1}{19200} < 0,0001$, то для вычисления интеграла с заданной точностью надо взять два первых члена разложения:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{144} \approx 0,4931.$$

3.4.2 Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов. Одним из методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений является представление решения уравнения в виде степенного ряда: сумма конечного числа членов ряда будет приближенно равна искомому решению. Степенной ряд находят методом неопределенных коэффициентов или методом последовательного дифференцирования, основанного на применении ряда Тейлора (Маклорена).

Представление решения дифференциального уравнения степенным рядом основано на теореме.

Пусть имеем дифференциальное уравнение n-го порядка вида

$$y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + f_2(x) y^{(n-2)} + ... + f_{n-1}(x) y' + f_n(x) y = F(x). \qquad (22)$$

Теорема. Если коэффициенты и правая часть дифференциального уравнения (22) разлагаются в степенной ряд по степеням $x - x_0$, сходящийся в $U(x_0)$ точки x_0, то решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \qquad (23)$$

($y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ – заданные числа), разлагается в степенной ряд по степеням $x-x_0$, сходящийся, по крайней мере, в меньшем из интервалов сходимости рядов для коэффициентов и правой части дифференциального уравнения.

Методы решения

1 Метод неопределенных коэффициентов удобен применительно к линейным уравнениям типа (22) и состоит в следующем: записывают решение в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами

$$y(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots \tag{24}$$

и, продифференцировав (24) n раз, из начальных условий (23) определяют значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Потом подставляют в дифференциальное уравнение вместо y и производных $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ соответствующие степенные ряды, а также записывают вместо коэффициентов и правой части их разложения в степенные ряды по степеням $x-x_0$. После произведенных действий над рядами сравнивают коэффициенты при одинаковых степенях $x-x_0$. Из полученных алгебраических уравнений определяют коэффициенты ряда – решение $y(x)$.

Пример 16 – Найти решение дифференциального уравнения $y'' - y\cos x = x$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Решение

Запишем искомое решение в виде ряда по степеням x, т. к. $x_0 = 0$.

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{25}$$

Найдем $y'(x)$ и $y''(x)$ решения $y(x)$:

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots,$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots.$$

Использовав начальные условия, определим a_0 и a_1 при $x_0 = 0$:

$$y(0) = a_0,\ a_0 = 1;\ y'(0) = a_1,\ a_1 = 0.$$

Для определения коэффициентов $a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ решение (25) подставим в исходное уравнение выражения y, y'' и разложение по степеням *x:*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots,$$

получим

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+30a_6x^4+\ldots-$$

$$-\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\ldots\right)=x.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, имеем

$$\left(2a_2+a_0\right)+\left(6a_3-a_1\right)x+\left(12a_4+\frac{a_0}{2}-a_2\right)x^2+\left(20a_5+\frac{a_1}{2}-a_3\right)x^3+$$

$$+\left(30a_6-\frac{a_0}{24}+\frac{a_2}{2}{}_3\right)x^4+\ldots=x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x левой и правой частей последнего уравнения:

$$x^0\,|\,2a_2-a_0=0,\;\; x^1\,|\,6a_3-a_1=1;$$

$$x^2\,|\,12a_4+\frac{a_0}{2}-a_2=0;$$

$$x^3\,|\,20a_5+\frac{a_1}{2}-a_3=0;$$

$$x^4\,|\,30a_6-\frac{a_0}{24}+\frac{a_2}{2}=0;$$

$$\ldots$$

Решив полученную систему алгебраических уравнений, определим

$$a_2=\frac{1}{2};\; a_3=\frac{1}{6}=\frac{1}{3!};\; a_4=0;\; a_5=\frac{1}{120}=\frac{1}{5!};\; a_6=-\frac{5}{24\cdot 30}=-\frac{5}{6!};\;\ldots.$$

Подставим значения коэффициентов в решение (25) и получим ответ:

$$y\left(x\right)=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{5}{6!}x^6+\ldots.$$

2 Метод последовательного дифференцирования основан на применении ряда Тейлора (Маклорена) и последовательного дифференцирования данного уравнения.

Решение уравнения (22) представляем в виде степенного ряда

$$y(x)=y(x_0)+y'(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!}+y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+y'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!}+$$
$$+y^{IV}(x_0)\frac{(x-x_0)^4}{4!}+...+y^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+y^{(n+1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.... \qquad (26)$$

Значения $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, …, $y^{(n-1)}(x_0)$ известны из начальных условий (23). Для нахождения $y^{(n)}(x_0)$ подставим в уравнение (22) $x=x_0$, получим $y^{(n)}(x_0)=y_n$. Затем, последовательно дифференцируя уравнение (22), определяют последующие коэффициенты ряда для искомого решения (26).

Пример 17 – Найти решение дифференциального уравнения

$$y''-xy=0 \qquad (27)$$

при начальных условиях $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Решение

Запишем решение уравнения в виде

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4+.... \qquad (28)$$

По условию – $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Подставив в дифференциальное уравнение $x=0$, получим $y''(0)=0$. Далее, последовательно дифференцируя уравнение (27) и подставляя значения $x=0$ и вычисленных предыдущих производных, определим

$$y'''=y+xy',\ y'''(0)=1;$$
$$y^{IV}=2y'+xy'',\ y^{IV}(0)=0;$$
$$y^{V}=3y''+xy''',\ y^{V}(0)=0;$$
$$y^{VI}=4y'''+xy^{IV},\ y^{VI}(0)=4;$$
$$y^{VII}=5y^{IV}+xy^{V},\ y^{VII}(0)=0$$

и т.д.

Подставляя в выражение (28) полученные значения $y(0)$ и производных, запишем решение $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{4}{6!}x^6+...$ уравнения (27).

4 Индивидуальные задания для самостоятельной работы

4.1 Записать первые четыре члена ряда по заданному общему члену:

1) $a_n = \dfrac{n+3}{n!}$;

2) $a_n = \dfrac{n+1}{2^n}$;

3) $a_n = \dfrac{n^3}{2^n}$;

4) $a_n = \dfrac{2^n}{n^n}$;

5) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$;

6) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$;

7) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{3n-2}$;

8) $a_n = \dfrac{2(n+1)}{4n-3}$;

9) $a_n = \dfrac{3^n-1}{2n+3}$;

10) $a_n = \dfrac{(2n-1)(2n+1)}{n!}$;

11) $a_n = \dfrac{2n-1}{5^{n-1}}$;

12) $a_n = \dfrac{n+1}{n!}$;

13) $a_n = \dfrac{n}{3n-2}$;

14) $a_n = \dfrac{n+2}{3n-1}$;

15) $a_n = \dfrac{2n-1}{4n-3}$;

16) $a_n = \dfrac{n+2}{(n+1)^2}$;

17) $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{n^2}$;

18) $a_n = \dfrac{2n}{(n+1)!}$;

19) $a_n = \dfrac{5^{n-1}}{3n+2}$;

20) $a_n = \dfrac{3n+1}{4^n}$;

21) $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$;

22) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

23) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$;

24) $a_n = \dfrac{3^{n-1}}{2^{2(n-1)}}$;

25) $a_n = \dfrac{n}{3^{n-1}}$;

26) $a_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$;

27) $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$;

28) $a_n = \dfrac{3^n}{(2n)!}$;

29) $a_n = \dfrac{4(n-1)}{3^{2(n+1)}}$;

30) $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+3)^2}$.

4.2 Найти формулу u_n общего члена ряда:

1) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\ldots$;

2) $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\ldots$;

3) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\dfrac{5}{9}+\ldots$;

4) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{9}+\dfrac{4}{27}+\ldots$;

5) $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\ldots$;

6) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\ldots$;

7) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{16}+\dfrac{6}{25}+\ldots$;

8) $2+\dfrac{4}{2}+\dfrac{8}{3}+\dfrac{16}{4}+\ldots$;

9) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{4^4}+\ldots$;

10) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\ldots$;

11) $1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}+\ldots$;

12) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{8}+\dfrac{6}{11}+\dfrac{8}{14}+\ldots$;

13) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{11}+\dfrac{7}{14}+\ldots$;

14) $\dfrac{2}{1^2}+\dfrac{4}{2^2}+\dfrac{8}{3^2}+\dfrac{16}{4^2}+\ldots$;

15) $1+\dfrac{3}{5}+\dfrac{5}{9}+\dfrac{7}{13}+\dfrac{9}{17}\ldots$;

16) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}...$; 21) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+...$; 26) $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+...$;

17) $\frac{3}{2}+\frac{4}{5}+\frac{8}{8}+\frac{6}{11}+...$; 22) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}...$; 27) $\frac{4}{1}+\frac{5}{1\cdot2}+\frac{6}{1\cdot2\cdot3}+...$;

18) $1+\frac{3}{5}+\frac{5}{25}+\frac{7}{125}+...$; 23) $\frac{2}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{8}+\frac{5}{11}+...$; 28) $\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+...$;

19) $\frac{2}{1}+\frac{3}{1\cdot2}+\frac{4}{1\cdot2\cdot3}+...$; 24) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+...$; 29) $\frac{1}{2}+\frac{8}{4}+\frac{27}{8}+\frac{64}{16}+...$;

20) $\frac{1}{1}+\frac{2}{4}+\frac{3}{7}+\frac{4}{10}+...$; 25) $\frac{1}{1}+\frac{4}{1\cdot2}+\frac{27}{1\cdot2\cdot3}+...$; 30) $\frac{2}{1}+\frac{4}{4}+\frac{8}{27}+\frac{16}{256}+...$.

4.3 Найти сумму S_n первых n членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и, пользуясь непосредственно определением, выяснить сходимость ряда, найти его сумму:

1) $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; 11) $u_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; 21) $u_n=\frac{1}{n(n+3)}$;

2) $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$; 12) $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; 22) $u_n=\frac{3^n+2^n}{6^n}$;

3) $u_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; 13) $u_n=(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right)^n$; 23) $u_n=\frac{1}{(n+1)(n+4)}$;

4) $u_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$; 14) $u_n=\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$; 24) $u_n=\frac{1}{10^{n-1}}$;

5) $u_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n-1}}$; 15) $u_n=\frac{n+6}{n(n+2)(n+3)}$; 25) $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$;

6) $u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{2^{n-1}}}$; 16) $u_n=\frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}, n>2$; 26) $u_n=\frac{n-4}{n(n-2)(n-1)}, n>2$;

7) $u_n=\frac{1}{n(n+2)}$; 17) $u_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$; 27) $u_n=\frac{1}{(n+1)(n+3)}$;

8) $u_n=\frac{1}{(n+2)(n+4)}$; 18) $u_n=\frac{1}{n(n+4)}$; 28) $u_n=\frac{3n+1}{n(n-1)(n+1)}, n>1$;

9) $u_n=\frac{8}{(4n+3)(4n-5)}$; 19) $u_n=\frac{1}{\sqrt[4]{7^n}}$; 29) $u_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^n$;

10) $u_n=\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$; 20) $u_n=\frac{(-1)^n}{3^n}$; 30) $u_n=\frac{3^n+5^n}{15^n}$.

4.4 Исследовать сходимость рядов, применяя необходимый сходимости признак и один из достаточных признаков сходимости рядов:

1) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}, a>0$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n-1}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}$;

2) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+9}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

3) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$;

4) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(arctg\ n)^2}{1+n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^n}$;

5) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$;

6) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+n)^2}{n(1+n^2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n n}$;

7) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(1+n)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{n}{3}$;

8) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(n+2)(n+4)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-an}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$;

9) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{\sqrt[3]{n^7}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$;

10) а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+2}{(n^2+1)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^5}$;

11) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt{2n+5}}{2^n}$;

12) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{3}{n}$;

13) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

14) а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+\sqrt{n}+5}\right)^n$;

15) а) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{4n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(3n-1)}$;

16) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n\left(2^n-1\right)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$;

17) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2\left(n+1\right)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot arctg\frac{1}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n\left(n+1\right)}$;

18) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;

19) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+1}\right)^n$;

20) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(n+1\right)}{\sqrt[3]{n^2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$;

21) а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln n\right)^k},k>1$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-an},\left(a>0\right)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{\left(n-1\right)!}$;

22) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$;

23) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\left(2n+1\right)^n\sqrt{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$;

24) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$;

25) а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

26) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(0,5\right)^n}{n^3}$;

27) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(arctg\ 2n\right)^3}{1+4n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$;

28) а) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2a^{-n},\left(a>1\right)$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^n$;

29) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{2n}{n+1}\right)^n$;

30) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\left(1+n\right)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n!\right)^2}{\left(2n\right)!}$.

4.5 Исследовать сходимость знакопеременного ряда. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{2^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2n-1)\frac{\pi}{4}\right)}{3^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n\sqrt{n}}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 5n}{\sqrt{n^3+1}}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{\pi}{4n}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2+1}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2n}}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}}{3^n}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{(n+1)^2}$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5n-2}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot n}{n^3+2}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^2}{(3n)!}$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$;

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}$;

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{6^n-5}$;

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{3\cdot n!}$;

24) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

26) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$;

27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$;

28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$;

29) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$;

30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(n+2)}{n^3+1}$.

4.6 Найти область сходимости функционального (степенного) ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2-x^2\right)^n$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi x}{4}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{10^{n-1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{x\ln^n x}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n x^n$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\lg^n x}{n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(x-3)^n$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$;

11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{a^{nx}}, a>1$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!x^n}{(n+1)^n}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}x^n}{n!}$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$;

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{3^{2n}(3n+2)}$;

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2n+1}$;

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5x^n}{n+2}$;

29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^n}$;

20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-x)^{n-1}}{n}$;

21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2x^n}{2^n}$;

22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n^2}\cdot x^{n^2}$;

23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n\cdot n!}{(2n)!}$;

24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{2n^2+1}$;

25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n x$;

26) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{\ln n}$;

27) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n^2}}{2^n}$;

28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^nx^n}{\sqrt[3]{n}}$;

30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{x^n}$.

4.7 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$ и исследовать на сходимость:

1) $f(x)=x^3-2x^2-5x-2,\ x_0=-4$;

2) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=4$;

3) $f(x)=\ln x,\ x_0=1$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2},\ x_0=-4$;

5) $f(x)=\cos^2 x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

6) $f(x)=\ln(x+3),\ x_0=0$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{1-x},\ x_0=2$;

8) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2},\ x_0=0$;

9) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=1$;

10) $f(x)=e^x,\ x_0=-2$;

1) $f(x)=\cos x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$;

12) $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ x_0=-1$;

13) $f(x)=x^2e^{-x},\ x_0=0$;

14) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}},\ x_0=0$;

15) $f(x)=\dfrac{1}{x+2},\ x_0=1$;

16) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^4},\ x_0=0$;

17) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3x-4},\ x_0=0$;

18) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2-x},\ x_0=-3$;

19) $f\left(x\right)=e^x,\ x_0=-5$;

20) $f\left(x\right)=x^4-5x^3+4x^2-3x+1,\ x_0=-1$;

21) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}\operatorname{arctg}x,\ x_0=0$;

22) $f\left(x\right)=\left(1-x\right)e^{-2x},\ x_0=0$;

23) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x},\ x_0=1$;

24) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x+3},\ x_0=1$;

25) $f\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{1+x},\ x_0=0$;

26) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{4+3x},\ x_0=0$;

27) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{1-x},\ x_0=0$;

28) $f\left(x\right)=\sin 2x\cdot\cos 2x,\ x_0=0$;

29) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{27-x},\ x_0=0$;

30) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-6x+5},\ x_0=3$.

4.8 Разложив подынтегральную функцию в степенной ряд Маклорена, вычислить $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ с точностью до 10^{-3}:

1) $\int\limits_{0,1}^{0,4}\dfrac{e^{-x}}{x^3}dx$;

2) $\int\limits_{0,2}^{0,5}\dfrac{\sin x}{x}dx$;

3) $\int\limits_0^1 x\cos\sqrt{x}dx$;

4) $\int\limits_{0,1}^{1,0}\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}dx$;

5) $\int\limits_0^{0,9}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$;

6) $\int\limits_0^1\ln\left(1+x^3\right)dx$;

7) $\int\limits_0^{0,9}x^3\cdot\arcsin x dx$;

8) $\int\limits_0^{0,8}\sqrt{1+x^2}dx$;

9) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{dx}{1+x^4}$;

10) $\int\limits_{0,1}^{0,5}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$;

11) $\int\limits_0^1\operatorname{arctg}\left(x^2\right)dx$;

12) $\int\limits_0^{0,25}xe^{-x^3}dx$;

13) $\int\limits_0^1\cos\sqrt[3]{x}dx$;

14) $\int\limits_{0,1}^{0,3}\dfrac{e^{-x}}{x^2}dx$;

15) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$;

16) $\int\limits_{0,1}^{0,5}\dfrac{e^{-x}-1}{x}dx$;

17) $\int\limits_0^{0,7}xe^{-x}dx$;

18) $\int\limits_0^1\sqrt[3]{1\text{-}x^3}dx$;

17) $\int\limits_0^{0,5}\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx$;

20) $\int\limits_0^{0,5}x\cdot\operatorname{arctg}x dx$;

21) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x}{x}dx$;

22) $\int\limits_0^1 x^3\sin x dx$;

23) $\int\limits_0^{0,5}\sin\left(x^2\right)dx$;

24) $\int\limits_0^1\sqrt{x}e^{-x^2}dx$;

25 $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{x}\ln\left(1+x\right)dx$;

26) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

27) $\int\limits_0^1\sqrt[3]{1+x^2}dx$;

28) $\int\limits_{0,1}^{\sqrt{3}}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$;

29) $\int\limits_{0,1}^{1} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2}dx$; 30) $\int\limits_{0}^{0,5} x\ln\left(1-x^2\right)dx$.

4.9 Найти решение дифференциального уравнения, применяя метод неопределенных коэффициентов или метод последовательного дифференцирования данного уравнения:

1) $y'x+y+2=0,\ y(1)=2$;
2) $y'-y=e^x,\ y(0)=1$;
3) $y'-y=x^2,\ y(0)=-2$;
4) $y''+xy=0,\ y(0)=1, y'(0)=0$;
5) $y''+\frac{1}{x}y'+y=0,\ y(0)=1, y'(0)=0$;
6) $y'(1-x)+y=1+x,\ y(0)=0$;
7) $y''=x^2-\cos x,\ y(0)=y'(0)=1$;
8) $y''=2y\cdot y',\ y(0)=y'(0)=1$;
9) $(1-x)y''+y=0,\ y(0)=y'(0)=1$;
10 $y''=2x-\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right),\ y(0)=1,\ y'(0)=-2$;
11) $y'=2y+x-1,\ y(1)=-0,25$;
12) $\left(1-x^2\right)y''-xy'=0,\ y(0)=0, y'(0)=1$;
13) $xy''+y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$;
14) $y''-x^2y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$;
15) $y''-y\cos x=x,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$;
16) $y'(x-3)+y=0,\ y(-6)=6$;
17) $y'+y=x,\ y(0)=0$;
18) $y'=y^2+x^2,\ y(0)=1$;
19) $y''+\frac{2}{x}y'+y=0,\ y(0)=1, y'(0)=0$;
20) $xy'+y=0,\ y(0)=0$;
21) $y'=x^2-y^2,\ y(0)=0$;
22) $xy'=x^2y^2-y+1,\ y(0)=1$;
23) $4x^2y''+y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0,5$;
24) $y''+xy'-\left(2x^2+1\right)y=0,\ y(0)=y'(0)=1$;
25) $xy'-2y=2\sin x-x\cos x,\ y(0)=0$;
26) $xy''+y'+xy=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$;
27) $(1-x)y'+y=1-x,\ y(0)=0$;
28) $y''+xy'+y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;
29) $y''+\frac{2}{x}y'+y=0,\ y(0)=y'(0)=1$;
30) $y''-xy+y=1,\ y(0)=y'(0)=0$.

Список литературы

1 Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие в 2 ч. / П. Е. Данко [и др.]. – 6-е изд. – М. : ОНИКС 21 век ; Мир и образование, 2003.

2 Высшая математика. Общий курс : учебник / А. И. Яблонский [и др.] ; под общ. ред. С. А. Самаля. – 2-е изд., перераб. – Минск : Выш. шк., 2000.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика : учебник / А. А. Гусак. – 4-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2003.

4 Индивидуальные задания по высшей математике. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учеб. пособие / Под ред. А. П. Рябушко. – 2-е изд., перераб. – Минск : Выш. шк., 2004.

5 Ряды и интегралы. Векторный и комплексный анализ. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. Операционное исчисление : сб. задач по высшей математике / Под ред. С. Н. Федина. – М. : Айрис-пресс, 2004.

6 Сборник задач по курсу высшей математики : учеб. пособие для вузов / Под ред. Г. И. Кручковича. – 3-е изд., перераб. – М. : Высш. шк., 1973.

7 Сборник задач по математике для втузов : учеб. пособие для втузов. Ч. 2 : Специальные разделы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986.

8 **Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. – 7-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2005.