

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

*Методические указания и варианты индивидуальных заданий  
для студентов всех специальностей дневной формы обучения*

**ИНТЕГРАЛЫ**



Могилев 2014

УДК 517  
ББК 22.1  
В 93

Рекомендовано к опубликованию  
учебно-методическим управлением  
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «1» октября 2013 г.,  
протокол № 2

Составители: Т. Ю. Орлова;  
С. Ф. Плешкунова

Рецензент И. И. Маковецкий

Представлены решения типовых вариантов по теме «Интегралы»,  
приведены варианты заданий для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов всех специальностей дневной формы  
обучения.

Учебное издание

## ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнев
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать 28.01.2014. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 2,33. Уч.-изд. л. 2,4. Тираж 56 экз. Заказ № 76.

Издатель и полиграфическое исполнение  
Государственное учреждение высшего профессионального образования  
«Белорусско-Российский университет»  
ЛИ № 02330/0548519 от 16.06.2009.  
Пр. Мира, 43, 212000, г. Могилев.

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский  
университет», 2014

## Индивидуальное задание № 1

Найти неопределенные интегралы.

### Вариант 1

$$1) \int \left( 4x^5 - \frac{x^3}{2} + \frac{2}{x^3} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt[4]{x^3}};$$

$$3) \int \frac{dx}{3-2x};$$

$$4) \int \frac{e^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$5) \int \frac{xdx}{(x^2-3)^2};$$

$$6) \int (4-3x)e^{-3x} dx;$$

$$7) \int \frac{(3x-5)dx}{x^2+3x-1};$$

$$8) \int \frac{x^4+2x^2-3x+1}{(x+1)(x^2+4x+4)} dx;$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin x - 3\cos x};$$

$$10) \int \frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}.$$

### Вариант 2

$$1) \int \left( 2x^4 - \frac{x^2}{5} + \frac{4}{x} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{(2x^3-3x)dx}{\sqrt[3]{x^2}};$$

$$3) \int \frac{dx}{(3x-2)^2};$$

$$4) \int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$5) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3-2}};$$

$$6) \int (4x-3)\cos 3x dx;$$

$$7) \int \frac{(5x-3)dx}{x^2+4x+5};$$

$$8) \int \frac{x^5+x^2-2x+3}{(x+3)(x^2+1)} dx;$$

$$9) \int \frac{dx}{8\sin^2 x - 16\sin x \cos x};$$

$$10) \int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})} dx.$$

### Вариант 3

$$1) \int \left( 2x^7 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{\sqrt{x^3}} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{(4\sqrt{x}-2)dx}{\sqrt[4]{x}};$$

$$3) \int \frac{dx}{(5x-2)^4};$$

$$4) \int \frac{dx}{(1+x^2)\arctg x};$$

$$5) \int x(3x^2+1)^4 dx;$$

$$6) \int (2x-1)\sin 4x dx;$$

$$7) \int \frac{(4x-1)dx}{x^2+5x-4};$$

8)  $\int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx;$

9)  $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx;$

10)  $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

**Вариант 4**

1)  $\int \left( 2x^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{x^4}} - 2\sqrt{x} \right) dx;$

2)  $\int \frac{(x^2 - 2) dx}{x^2 + 3};$

3)  $\int 2^{3x-1} dx;$

4)  $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x dx}{(1+x^2)};$

5)  $\int x \cos(3x^2 + 1) dx;$

6)  $\int (2x + 3)e^{-4x} dx;$

7)  $\int \frac{(4x-1) dx}{\sqrt{x^2 + 6x - 4}};$

8)  $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{(x+2)(x^2 - 2x + 1)} dx;$

9)  $\int \frac{dx}{5 + 3\sin^2 x};$

10)  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 - \sqrt[4]{x}}.$

**Вариант 5**

1)  $\int \left( 4x^3 + \frac{x}{2} + \frac{2}{x^3} \right) dx;$

2)  $\int \frac{(3\sqrt[3]{x^2} - 2) dx}{x^3};$

3)  $\int \frac{dx}{2x-3};$

4)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x}};$

5)  $\int \frac{x dx}{e^{3x^2+4}};$

6)  $\int x^3 \ln x dx;$

7)  $\int \frac{(x-5) dx}{x^2 + 3x + 1};$

8)  $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - x - 2}{x(x+1)^2} dx;$

9)  $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x};$

10)  $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{2x+1}}.$

**Вариант 6**

1)  $\int \left( 3 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \frac{2}{x^3} \right) dx;$

2)  $\int 4^x \left( 3 - \frac{4^{-x}}{x} \right) dx;$

3)  $\int \cos(5-2x) dx;$

4)  $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 x dx}{\sin^2 x};$

5)  $\int \frac{3x dx}{9x^2 + 2};$

6)  $\int x \operatorname{arctg} x dx;$

7)  $\int \frac{(2x-5)dx}{x^2+3x+1};$

8)  $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx;$

9)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cos^2 x};$

10)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}.$

**Вариант 7**

1)  $\int \left( 4x^5 - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} \right) dx;$

2)  $\int \frac{(3\sqrt[3]{x} - 2x) dx}{x^4};$

3)  $\int \sqrt{3x-1} dx;$

4)  $\int x^2 \cdot 3^{2x^3+3} dx;$

5)  $\int \frac{dx}{x \ln^2 x};$

6)  $\int (x+1) \cos 3x dx;$

7)  $\int \frac{(3x+2) dx}{x^2-4x+1};$

8)  $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)} dx;$

9)  $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x + 1};$

10)  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{3x + \sqrt[3]{x^2}}.$

**Вариант 8**

1)  $\int \left( 5x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x^3} \right) dx;$

2)  $\int \frac{(3\sqrt[4]{x} - 2x^2) dx}{\sqrt{x}};$

3)  $\int e^{4x+3} dx;$

4)  $\int \frac{x^2}{2x^3+5} dx;$

5)  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x}};$

6)  $\int (x+1) \ln x dx;$

7)  $\int \frac{(5x+2) dx}{\sqrt{x^2-4x+13}};$

8)  $\int \frac{x^3-x+2}{x^4-x^2} dx;$

9)  $\int \sin 3x \cos 5x dx;$

10)  $\int \frac{\sqrt[6]{3x+1} + 1}{\sqrt{3x+1} - \sqrt[3]{3x+1}} dx.$

**Вариант 9**

1)  $\int \left( 4x^7 + \frac{x^4}{3} - \frac{8}{x^3} \right) dx;$

2)  $\int \frac{(5x - \sqrt[4]{x^3}) dx}{\sqrt[3]{x}};$

3)  $\int 3^{5x-2} dx;$

4)  $\int \frac{x^2}{x^6+9} dx;$

5)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x} dx}{\sin^2 x};$

6)  $\int x \arcsin x dx;$

7)  $\int \frac{(4x+3)dx}{x^2-4x+13};$

8)  $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)}dx;$

**Вариант 10**

1)  $\int \left( 3\sqrt{x^7} + 3x^4 + \frac{4}{x^3} \right) dx;$

2)  $\int \sqrt{4x+5}dx;$

3)  $\int \frac{(5x-2\sqrt{x^3})dx}{x^2};$

4)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+2}}dx;$

5)  $\int \frac{dx}{x \ln^2 x};$

**Вариант 11**

1)  $\int \left( 3^x - \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x} \right) dx;$

2)  $\int \frac{2+\sin^3 x}{5\sin^2 x}dx;$

3)  $\int \frac{dx}{(5x-3)^3};$

4)  $\int \frac{3xdx}{x^2-25};$

5)  $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx;$

**Вариант 12**

1)  $\int \left( \frac{1}{x} - \frac{11}{x^4} + \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx;$

2)  $\int \frac{\cos^2 x - \sin x \cdot \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx;$

3)  $\int \frac{6}{7^{2-3x}} dx;$

9)  $\int \sin^4 x dx;$

10)  $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}} dx.$

6)  $\int (x^2+1)\sin x dx;$

7)  $\int \frac{(x+3)dx}{x^2-3x+2};$

8)  $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2} dx;$

9)  $\int \frac{dx}{6-3\sin^2 x};$

10)  $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}} dx.$

6)  $\int (2x-3)\cos 4x dx;$

7)  $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2-10x+26}};$

8)  $\int \frac{(x+3)dx}{(x-1)(x+2)(x-3)};$

9)  $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x};$

10)  $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[7]{x}}{\sqrt[7]{x^8} + \sqrt[14]{x^{15}}} dx.$

4)  $\int x \cos(2x^2+3) dx;$

5)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}};$

6)  $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx;$

7)  $\int \frac{3x+2}{x^2-5x+6} dx;$

8)  $\int \frac{2x^3 + 5x^2 - 1}{x^3 + x^2} dx;$

9)  $\int \sin^5 x dx;$

10)  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x+1}}.$

**Вариант 13**

1)  $\int (3x^5 - \sqrt[4]{x^3} + 2) dx;$

2)  $\int \frac{2 + \sqrt{x^2 + 4}}{x^2 + 4} dx;$

3)  $\int \sqrt{4x + 3} dx;$

4)  $\int \frac{5x dx}{\sqrt{x^2 - 2}};$

5)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$

6)  $\int (3x - 1) \ln x dx;$

7)  $\int \frac{(4x - 3) dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 17}};$

8)  $\int \frac{(6x^2 + 3) dx}{x^3 - 6x^2 + 5x};$

9)  $\int \frac{dx}{2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x + 4};$

10)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$

**Вариант 14**

1)  $\int \left( \frac{2}{x^3} - 2\sqrt[3]{x^2} + 3 \right) dx;$

2)  $\int \frac{2 + \cos^3 x}{\cos^2 x} dx;$

3)  $\int \sin(3x - 5) dx;$

4)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{5 - x^6}};$

5)  $\int \frac{5^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1 - x^2}};$

6)  $\int e^x \cos 3x dx;$

7)  $\int \frac{(3x + 2) dx}{x^2 + 8x + 17};$

8)  $\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)^2};$

9)  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}};$

10)  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x + 2\sqrt[3]{x^2}}.$

**Вариант 15**

1)  $\int \left( 5^x + \frac{3}{x^4} - \frac{x^3}{2} \right) dx;$

2)  $\int \frac{\sqrt[6]{x^5} - 5x^2}{\sqrt{x}} dx;$

3)  $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}};$

4)  $\int \frac{xdx}{x^4 + 3};$

5)  $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$

6)  $\int x \cos^2 x dx;$

7)  $\int \frac{(2x - 1) dx}{\sqrt{x^2 + 5x - 6}};$

8)  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx;$

$$9) \int \frac{(2x^2 + 7x + 7)dx}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)};$$

$$10) \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{3x+1}+1} dx.$$

### Вариант 16

$$1) \int (x^3 - 4\sqrt{x} + 6) dx;$$

$$6) \int (x^2 - 1)e^{3x} dx;$$

$$2) \int \frac{3x^2 + 4}{\sqrt[5]{x^3}} dx;$$

$$7) \int \frac{(4-x)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}};$$

$$3) \int \frac{dx}{\sin^2 3x};$$

$$8) \int \frac{dx}{1 + 3\sin x};$$

$$4) \int x\sqrt{1-3x^2} dx;$$

$$9) \int \frac{(7x-4)dx}{x^3 - 2x^2 + 5x};$$

$$5) \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx;$$

$$10) \int \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}+2}.$$

### Вариант 17

$$1) \int \left( \sqrt{x} + 5e^x - \frac{9}{x^3} \right) dx;$$

$$6) \int e^{3x} \cos x dx;$$

$$2) \int \frac{3x^3 + 5}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$7) \int \frac{(5x+1)dx}{x^2 + x + 1};$$

$$3) \int \frac{dx}{(3x+5)^4};$$

$$8) \int \frac{dx}{2 + 5\cos x};$$

$$4) \int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}};$$

$$9) \int \frac{(2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1)dx}{x^3 + x};$$

$$5) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x};$$

$$10) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

### Вариант 18

$$1) \int \left( 5x - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^4} \right) dx;$$

$$5) \int \frac{\arccos^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$2) \int \frac{3\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x}}{x^2} dx;$$

$$6) \int (x^2 + 1) \ln x dx;$$

$$3) \int \sin \left( \frac{x}{6} - 2 \right) dx;$$

$$7) \int \frac{(3x+1)dx}{x^2 - 4x + 5};$$

$$4) \int \frac{5xdx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$8) \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 5\sin^2 x};$$

$$9) \int \frac{(x^3 + 2) dx}{x^3 - 5x^2 + 4x};$$

$$10) \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}.$$

### Вариант 19

$$1) \int \left( 5x^2 + \frac{2}{x^3} - \frac{x}{3} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$3) \int 4^{2-\frac{x}{3}} dx;$$

$$4) \int \frac{(\operatorname{arctg} x)^5}{1+x^2} dx;$$

$$5) \int \frac{\sin x dx}{(2 \cos x + 3)^2};$$

$$6) \int \ln(x+4) dx;$$

$$7) \int \frac{(x+1) dx}{x^2 - 3x + 4};$$

$$8) \int \sin 2x \sin 5x dx;$$

$$9) \int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}.$$

### Вариант 20

$$1) \int \left( 3 \sin x + 2x^3 - \frac{3}{x^4} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{6x - \sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}};$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} dx;$$

$$5) \int x e^{x^2+3} dx;$$

$$6) \int e^{-2x} (4x-3) dx;$$

$$7) \int \frac{(3x-2) dx}{\sqrt{x^2+6x-9}};$$

$$8) \int \cos^3 x \sin^8 x dx;$$

$$9) \int \frac{6x - 2x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}.$$

### Вариант 21

$$1) \int \left( 4x^3 + 2\sqrt{x} - \frac{5}{x^2} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{2 - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$3) \int \frac{dx}{5-2x};$$

$$4) \int e^x \cos(2e^x + 3) dx;$$

$$5) \int \frac{5^{\ln x}}{x} dx;$$

$$6) \int (2x-5) \sin 2x dx;$$

$$7) \int \frac{(3-4x) dx}{x^2 - 8x + 17};$$

$$8) \int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[2]{\cos^2 x}};$$

$$9) \int \frac{(2x^2 + 41x - 91)dx}{(x-1)(x+3)(x-4)};$$

$$10) \int \frac{\sqrt{2x+3}dx}{x}.$$

### Вариант 22

$$1) \int \left( 7x^4 - \frac{1}{2x^2} + 3 \right) dx;$$

$$2) \int \frac{4x-5}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{3x-4}};$$

$$4) \int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2}};$$

$$5) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}};$$

$$6) \int \sqrt[3]{x^2} \ln x dx;$$

$$7) \int \frac{(x+1)dx}{x^2-3x+4};$$

$$8) \int \cos^2 3x dx;$$

$$9) \int \frac{2x^5 - 2x^3 + x^2}{1-x^4} dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+3}}.$$

### Вариант 23

$$1) \int \left( 2x^5 - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \frac{10}{x^4} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{7-5\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x} dx;$$

$$3) \int 5^{3-\frac{x}{4}} dx;$$

$$4) \int \frac{5xdx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$5) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$6) \int (x^2 - x + 1) \sin x dx;$$

$$7) \int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+1}};$$

$$8) \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 3\cos x - 5};$$

$$9) \int \frac{x-4}{(x+1)(x^2+1)} dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt{2x-1}}.$$

### Вариант 24

$$1) \int \left( 3x^4 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^4} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{3-5\cos^3 x}{\cos^2 x} dx;$$

$$3) \int \sqrt{3x-4} dx;$$

$$4) \int \frac{\arcsin^5 x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$5) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}};$$

$$6) \int \frac{\ln x}{x^3} dx;$$

$$7) \int \frac{(5x+2)dx}{x^2-4x+1};$$

$$8) \int \frac{dx}{6-5\cos^2 x};$$

$$9) \int \frac{4x^2 + x + 10}{x^3 + 8} dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{x}}}.$$

### Вариант 25

$$1) \int \left( \frac{3}{x^4} - 2x^3 - \sqrt[4]{x^3} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{3 - 5\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4} dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{(3x - 4)^2};$$

$$4) \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}};$$

$$5) \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 2};$$

$$6) \int e^x \cos 4x dx;$$

$$7) \int \frac{(3x + 2) dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 6}};$$

$$8) \int \sin^3 x \cos^5 x dx;$$

$$9) \int \frac{4x^4 + 8x^3 - 1}{(x^2 + x)(x + 1)} dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 6x - 1}}.$$

### Вариант 26

$$1) \int \left( \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - 5x^3 - \frac{7}{x^4} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{1 - 3\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx;$$

$$3) \int 2^{3x+4} dx;$$

$$4) \int \frac{3\sqrt{\operatorname{arctg} x} dx}{1 + x^2};$$

$$5) \int x^2 \sin(x^3 + 2) dx;$$

$$6) \int x^2 e^{5x} dx;$$

$$7) \int \frac{(5x - 8) dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 6}};$$

$$8) \int \frac{dx}{7\sin x - 2\cos x - 3};$$

$$9) \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx;$$

$$10) \int \frac{xdx}{\sqrt[4]{2x + 3} - \sqrt{2x + 3}}.$$

### Вариант 27

$$1) \int \left( 9x^4 + 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{8}{\sqrt[4]{x}} \right) dx;$$

$$2) \int 2^x \left( \frac{2^{-x}}{\cos^2 x} - 3 \right) dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{9x - 5}};$$

$$4) \int \frac{3 + \arcsin x dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$5) \int \sin^4 x \cos x dx;$$

$$6) \int \frac{\ln x}{x^3} dx;$$

$$7) \int \frac{(8x + 5) dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}};$$

$$8) \int \frac{dx}{7\sin^2 x - 2\cos^2 x};$$

$$9) \int \frac{2x^3 + 5x^2 - 1}{x^3 + x^2} dx;$$

$$10) \int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(2x-3)^3} - \sqrt{2x-3}}.$$

### Вариант 28

$$1) \int \left( 3x^5 + 4\sqrt[3]{x} + \frac{8}{x^7} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{1 + 3\sqrt{x^2 + 9}}{x^2 + 9} dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}};$$

$$4) \int \frac{2 \sin(\ln x)}{x} dx;$$

$$5) \int \frac{3^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$6) \int (3x+5) \cos 4x dx;$$

$$7) \int \frac{(4x-5) dx}{x^2 + 3x - 2};$$

$$8) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 \cos x + 1}};$$

$$9) \int \frac{x^2 + 3x - 6}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)} dx;$$

$$10) \int \frac{\sqrt{2x+3} dx}{3 - \sqrt[4]{2x+3}}.$$

### Вариант 29

$$1) \int \left( 4x^7 + 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{x^7} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{2 + \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4} dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{\sin^2 9x};$$

$$4) \int \frac{\sqrt{\ln x - 2}}{x} dx;$$

$$5) \int \frac{dx}{\arcsin^3 x \sqrt{1-x^2}};$$

$$6) \int x \operatorname{arctg} 2x dx;$$

$$7) \int \frac{(9x+7) dx}{x^2 + 8x + 20};$$

$$8) \int \frac{\cos x dx}{3 \sin x + 5};$$

$$9) \int \frac{6x^4 - 30x^2 + 30}{(x+2)(x^2-1)} dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{3 - \sqrt[4]{4x-1}}.$$

### Вариант 30

$$1) \int \left( 5x^6 + \sqrt[3]{x} + \frac{12}{x^7} \right) dx;$$

$$2) \int \frac{2 + \sqrt[5]{x^2}}{x^2} dx;$$

$$3) \int e^{8x-3} dx;$$

$$4) \int \sin x (3 \cos x - 1)^4 dx;$$

$$5) \int \frac{dx}{\operatorname{arctg} x (1+x^2)};$$

$$6) \int e^x \cos 5x dx;$$

$$7) \int \frac{(6x+7) dx}{x^2 + 8x + 25};$$

$$8) \int \frac{dx}{3 \sin x + 5 \cos x - 2};$$

$$9) \int \frac{4x^4 + 8x^3 - x - 2}{x(x+1)^2} dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{3x+4} + 2\sqrt[4]{3x+4}}.$$

### Решение типового варианта

Найти неопределенные интегралы.

$$1) \int \left( 2x^4 - \frac{2}{x^5} + \sqrt[7]{x^2} \right) dx.$$

*Решение*

$$\begin{aligned} \int \left( 2x^4 - \frac{2}{x^5} + \sqrt[7]{x^2} \right) dx &= 2 \int x^4 dx - 2 \int x^{-5} dx + \int x^{\frac{2}{7}} dx = \frac{2x^5}{5} - \frac{2x^{-4}}{-4} + \frac{x^{\frac{9}{7}}}{\frac{9}{7}} + C = \\ &= \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{2x^4} + \frac{7}{9}\sqrt[7]{x^9} + C; \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{2x^3 - 4}{\sqrt[4]{x}} dx.$$

*Решение*

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^3 - 3}{\sqrt[4]{x}} dx &= 5 \int \frac{x^3}{\sqrt[4]{x}} dx - 3 \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = 5 \int x^{\frac{11}{4}} dx - 3 \int x^{-\frac{1}{4}} dx = 5 \frac{x^{\frac{15}{4}}}{\frac{15}{4}} - 3 \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^{15}} - 4 \sqrt[4]{x^3} + C; \end{aligned}$$

$$3) \int \cos(8x-1) dx.$$

*Решение*

$$\int \cos(8x-1) dx = \frac{1}{8} \int \cos(8x-1) d(8x-1) = \frac{1}{8} \sin(8x-1) + C;$$

$$4) \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}}.$$

*Решение*

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}} = \left| \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x) \right| = - \int \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = -2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + C;$$

$$5) \int x^2 (2x^3 + 5)^6 dx.$$

*Решение*

$$\begin{aligned} \int x^2 (2x^3 + 5)^6 dx &= \left| d(2x^3 + 5) = 6x dx \right| = \frac{1}{6} \int (2x^3 + 5)^6 \cdot 6x dx = \\ &= \frac{1}{6} \int (2x^3 + 5)^6 d(2x^3 + 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(2x^3 + 5)^7}{7} + C = \frac{(2x^3 + 5)^7}{42} + C; \end{aligned}$$

$$6) \int (2x - 1) \ln x dx.$$

*Решение*

$$\begin{aligned} \int (2x - 1) \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = (2x - 1) dx \\ du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x^2 - x \end{array} \right| = (x^2 - x) \ln x - \int (x^2 - x) \frac{1}{x} dx = \\ &= (x^2 - x) \ln x - \int (x - 1) dx = (x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C; \end{aligned}$$

$$7) \int \frac{7 - 3x}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

*Решение*

$$\begin{aligned} \int \frac{7 - 3x}{x^2 - 3x + 2} dx &= -3 \int \frac{x - \frac{7}{3}}{x^2 - 3x + 2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{2x - \frac{14}{3}}{x^2 - 3x + 2} dx = \\ &= -\frac{3}{2} \int \frac{(2x - 3) + 3 - \frac{14}{3}}{x^2 - 3x + 2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{(2x - 3) - \frac{5}{3}}{x^2 - 3x + 2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{(2x - 3)}{x^2 - 3x + 2} dx + \\ &+ \frac{5}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = -\frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 2} = \\ &= -\frac{3}{2} \ln|x^2 - 3x + 2| + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = -\frac{3}{2} \ln|x^2 - 3x + 2| + \\ &+ \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \right| + C = \frac{3}{2} \ln|x^2 - 3x + 2| + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{x - 2}{x - 1} \right| + C; \end{aligned}$$

$$8) \int \frac{dx}{5 \cos x - 7 \sin x + 1}.$$

*Решение*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 \cos x - 7 \sin x + 1} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{5(1-t^2)}{1+t^2} - \frac{14t}{1+t^2} + 1} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{-4t^2 - 14t + 6} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{7}{2}t - \frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t^2 + \frac{7}{2}t + \frac{49}{16}\right) - \frac{73}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{73}{16}} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t + \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{73}}{4}}{t + \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{73}}{4}} \right| + C = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{4t + 7 - \sqrt{73}}{4t + 7 + \sqrt{73}} \right| + C = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 7 - \sqrt{73}}{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 7 + \sqrt{73}} \right| + C; \end{aligned}$$

$$9) \int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx.$$

*Решение*

Разложим дробь  $\frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)}$  на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \\ &= \frac{A(x+2)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x+2)^2}{(x+2)^2(x^2+4)}. \end{aligned}$$

$$A(x+2)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+4x+4) = x^3 + 5x^2 + 12x + 4.$$

$$\begin{aligned} Ax^3 + 2Ax^2 + 4Ax + 8A + Bx^2 + 4B + Cx^3 + 4Cx^2 + 4Cx + Dx^2 + 4Dx + 4D &= \\ = x^3 + 5x^2 + 12x + 4. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} x = -2 & 8B = -8 \Rightarrow B = -1; \\ x^3 & A + C = 1; \\ x^1 & 4A + 4C + 4D = 12; \\ x^0 & 8A + 4B + 4D = 4. \end{array}$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} B = -1; \\ A + C = 1; \\ 4A + 4C + 4D = 12; \\ 8A + 4B + 4D = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} B = -1; \\ C = 1 - A; \\ 4A + 4 - 4A + 4D = 12; \\ 8A - 4 + 4D = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} B = -1; \\ C = 1 - A; \\ 4D = 8; \\ 8A + 4D = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} B = -1; \\ D = 2; \\ A = 0; \\ C = 1. \end{cases}$$

Следовательно,  $\frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} = -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{x+2}{x^2+4}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx &= \int \left( -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{x+2}{x^2+4} \right) dx = \frac{1}{x+2} + \int \frac{xdx}{x^2+4} + 2 \int \frac{dx}{x^2+4} = \\ &= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \int \left( \frac{2xdx}{x^2+4} \right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} + \arctg \frac{x}{2} = \\ &= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \arctg \frac{x}{2} + C; \end{aligned}$$

$$10) \int \frac{4\sqrt{x-2} + \sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2} + 2\sqrt[3]{x-2}} dx.$$

*Решение*

$$\begin{aligned} \int \frac{4\sqrt{x-2} + \sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2} + 2\sqrt[3]{x-2}} dx &= \left| \begin{array}{l} x-2 = t^6, t = \sqrt[6]{x-2} \\ x = t^6 + 2, dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{(4t^3 - t) \cdot 6t^5 dt}{t^3 + 2t^2} = 6 \int \frac{4t^6 - t^4}{t+2} dt = \\ &= 6 \int \left( 4t^5 - 8t^4 + 15t^3 - 30t^2 + 60t - 120 + \frac{240}{t+2} \right) dt = \\ &= 6 \left( \frac{2}{3} t^6 - \frac{8}{5} t^5 + \frac{15}{4} t^4 - 10t^3 + 30t^2 - 120t + 240 \ln|t+2| \right) + C = \\ &= 4(x-2) - \frac{48}{5} \sqrt[6]{(x-2)^5} + \frac{45}{2} \sqrt[3]{(x-2)^2} - 60\sqrt{x-2} + 180\sqrt[3]{x-2} - 720\sqrt[6]{x-2} + \\ &\quad + 1440 \ln|\sqrt[6]{x-2} + 2| + C. \end{aligned}$$

## Индивидуальное задание № 2

### Вариант 1

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx; \quad 3) \int_0^5 \frac{dx}{(25 + x^2)\sqrt{25 + x^2}}.$$

$$2) \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}; \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[6]{(1 - \sin x)^5}} dx.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = x^3$ ,  $y = 2x$ ,  $y = x$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = 4 \cos \varphi$ ,  $\rho = 2$  ( $\rho \geq 2$ ). Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \quad 0 \leq t \leq 3\pi. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = -x^2 + 5x - 6$ ,  $y = 0$ .

### Вариант 2

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^1 x^2 e^{3x} dx; \quad 3) \int_0^{16} \sqrt{256 - x^2} dx.$$

$$2) \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_{-\infty}^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}; \quad 2) \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x^2 - 2x$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной двухлепестковой розой,

заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = \cos 2\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = 3 \sin x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ .

### Вариант 3

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}; \quad 3) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$2) \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x - 9}}; \quad 2) \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = \sqrt{3} \cos \varphi, \rho = \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = x^2, x = 2, y = 0$ .

### Вариант 4

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^3 (x^2 - 2x) \sin 2x dx; \quad 2) \int_{\ln 7}^{\ln 26} \frac{e^x}{\sqrt[3]{(1+e^x)^2}} dx;$$

$$3) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}.$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 25};$$

$$2) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = \arccos x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 2 \sin 4\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = x^3$ ,  $y = x$ .

### Вариант 5

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx;$$

$$3) \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

$$2) \int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-1}};$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \arctg^2 x};$$

$$2) \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = (x+1)^2$ ,  $y^2 = x+1$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y^3 = x^2$ ,  $y = 1$ .

### Вариант 6

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx; \quad 3) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx.$$

$$2) \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{4x^4 + 1}; \quad 2) \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = 2x - x^2 + 3$ ,  $y = x^2 - 4x + 3$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой и окружностью, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = 4 \sin 3\varphi$ ,  $\rho = 2$  ( $\rho \geq 2$ ). Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}.$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = 2x - x^2$ ,  $y = -x + 2$ .

### Вариант 7

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{3\sqrt{x^2}}; \quad 3) \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$2) \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx; \quad 2) \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $x = (y-2)^3$ ,  $x = 4y - 8$ .

Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = 2\sin\varphi$ ,  $\rho = 4\sin\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = 0$ .

### Вариант 8

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-2}^0 (x^2 + 2)e^{\frac{x}{2}} dx; \quad 3) \int_0^4 x^2 \sqrt{16 - x^2} dx.$$

$$2) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}; \quad 2) \int_{-3}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x + 3}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = (x - 1)^2$ ,  $y^2 = x - 1$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y^2 = x - 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = x^3$ ,  $y = 1$ .

### Вариант 9

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx; \quad 3) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}.$$

$$2) \int_0^1 3(x^2 + x^2 e^{x^3}) dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}; \quad 2) \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $x = 4 - (y-1)^2$ ,  $x = y^2 - 4y + 3$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 4 \cos 4\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = 5 \cos x$ ,  $y = \cos x$ ,  $x = 0$  ( $x \leq 0$ ).

### Вариант 10

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^1 (x+1) \ln^2(x+1) dx; \quad 3) \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$$

$$2) \int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_2^{+\infty} \frac{\ln^2(x-1)}{x-1} dx; \quad 2) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $y = 2x^3$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной одним лепестком трехлепестковой розы, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 6 \cos 3\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ x = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = (x - 1)^2$ ,  $y = 1$ .

### Вариант 11

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{\frac{3}{2}}^2 \operatorname{arctg}(2x - 3) dx; \quad 3) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}.$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{81 dx}{(2x + 3)^5}; \quad 2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \operatorname{tg} x dx.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = x^3$ ,  $y = x^2$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = \cos \varphi$ ,  $\rho = 2 \cos \varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $x = \sqrt[3]{y - 2}$ ,  $x = 1$ ,  $y = 1$ .

### Вариант 12

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx; \quad 3) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$2) \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx; \quad 2) \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - 4x}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = -x^2$ ,  $y = -3x + 2$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 1 - \cos \varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = e^{1-x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

### Вариант 13

1 Вычислить определенные интегралы:

1)  $\int_0^{\pi/2} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx$ ;

3)  $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ .

2)  $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+4}} dx$ ;

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

1)  $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$ ;

2)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$ .

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = (x-1)^3$ ,  $y = x-1$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной одним лепестком трехлепестковой розы, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 2 \sin 3\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = -1 - x^2$ ,  $x = 0$ .

**Вариант 14**

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2(x+2) dx; \quad 3) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$$

$$2) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}; \quad 2) \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = \sqrt{2x}$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = \sin \varphi$ ,  $\rho = 2 \sin \varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = x^2 - 2x + 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

**Вариант 15**

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-2}^0 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx; \quad 3) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}.$$

$$2) \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx; \quad 2) \int_{-3}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $x = 1$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной шестилепестковой ро-

зой, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 2 \cos 6\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = \sqrt{x-1}$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0,5$ .

### Вариант 16

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx; \quad 3) \int_0^2 \frac{dx}{(4 + x^2)\sqrt{4 + x^2}}.$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; \quad 2) \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{x dx}{\sqrt[3]{4 - 9x^2}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = 2x^2$ ,  $y = -x^3$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = 3 \sin \varphi$ ,  $\rho = 5 \sin \varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ .

### Вариант 17

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x} dx; \quad 3) \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$2) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x - \operatorname{arccctg} 3x}{1+9x^2} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5};$$

$$2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = 2x - x^2$ ,  $y = -x$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, лежащей в первой четверти и ограниченной осью  $Ox$  и окружностями, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = \frac{3}{2} \cos \varphi$ ,  $\rho = \frac{5}{2} \cos \varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y^2 = (x+4)^3$ ,  $x=0$ .

### **Вариант 18**

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$$

$$3) \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$$

$$2) \int_e^{e^4} \frac{1-3\sqrt{\ln x}}{x} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}} dx;$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = \sqrt{2x}$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 2(1 + \sin \varphi)$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $x = 2$ .

### Вариант 19

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^{\pi/2} (1 - 5x^2) \sin x dx; \quad 3) \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}.$$

$$2) \int_0^{\sin^{-1} 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}; \quad 2) \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64 - x^6}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$ ,  $x = e^2$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной двумя лепестками трехлепестковой розы, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 2 \cos 3\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = x^3$ ,  $y = \sqrt{x}$ .

### Вариант 20

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx; \quad 3) \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16 - x^2)\sqrt{16 - x^2}}.$$

$$2) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\arctg x)^4}{1 + x^2} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_{-\infty}^0 \left( \frac{x^2}{x^3 - 1} - \frac{x}{1 + x^2} \right) dx; \quad 2) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[7]{\cos^2 x}} dx.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = x^2 - 9$ ,  $y = -x - 7$ .

Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой и окружностью, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = 6 \sin 3\varphi$ ,  $\rho = 3$  ( $\rho \geq 3$ ). Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = \ln x$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

### Вариант 21

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2x dx; \quad 3) \int_0^{\frac{5}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

$$2) \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1};$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{4 dx}{x(1 + \ln^2 x)}; \quad 2) \int_{\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + 3x}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y^2 = x^3$ ,  $y = x^3$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, лежащей в первой четверти и ограниченной окружностями, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = 2 \cos \varphi$ ,  $\rho = 2\sqrt{3} \sin \varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = x^2 + 1$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

**Вариант 22**

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx; \quad 3) \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx.$$

$$2) \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{x^4 + 1}; \quad 2) \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3 - 4x}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = 2(x^2 - 1)$ ,  $y = x^2 + x$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной шестилепестковой розой, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = \sin 6\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $xu = 4$ ,  $2x + y - 6 = 0$ .

**Вариант 23**

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{x}{e^{3x}} dx; \quad 3) \int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8 - x^2)^3}}.$$

$$2) \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1 + 4x^2)} dx; \quad 2) \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = x^2 + 2$ ,  $x + y = 4$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = \cos 3\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = (x - 1)^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

### Вариант 24

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx; \quad 3) \int_0^5 x^2 \sqrt{25 - x^2} dx.$$

$$2) \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16 + x^2)^5}}; \quad 2) \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2 - 3x)} dx}{2 - 3x}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = x^2 + 2x$ ,  $y = x + 2$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 2(1 - \sin \varphi)$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = x^2$ ,  $y^2 - x = 0$ .

### Вариант 25

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_1^2 x \ln^2 x dx; \quad 3) \int_0^3 \frac{dx}{(9 + x^2)\sqrt{9 + x^2}}.$$

$$2) \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}; \quad 2) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2 dx}{(1-x) \ln^2(1-x)}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = x + 1$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной одним лепестком четырехлепестковой розы, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = \frac{1}{2} \sin 4\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $2x - x^2 - y = 0$ ,  $2x^2 - 4x + y = 0$ .

### Вариант 26

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_2^3 (x-1)^3 \ln^2(x-1) dx; \quad 3) \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$2) \int_0^1 \frac{(x^2+1) dx}{(x^3+3x+1)^2};$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}; \quad 2) \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1) dx}{3x-1}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = 2^x$ ,  $y = 2x - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = 2 \cos \varphi$ ,  $\rho = 3 \cos \varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 0,5 \cos t - 0,25 \cos 2t, \\ y = 0,5 \sin t - 0,25 \sin 2t, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = (x - 1)^2$ ,  $y = 1$ .

### Вариант 27

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-1}^1 x^2 e^{-x/2} dx; \quad 3) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx.$$

$$2) \int_1^2 \frac{1 - 2x}{(x - x^2 - 1)^2} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}}; \quad 2) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = x^3$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной одним лепестком двухлепестковой розы, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 3 \cos 2\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = -2x - x^2$ ,  $y = -x + 2$ ,  $x = 0$ .

### Вариант 28

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx; \quad 3) \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64 - x^2)^3}}.$$

$$2) \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx;$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}; \quad 2) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y^2 = x + 1$ ,  $y^2 = 9 - x$ .

Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, лежащей в первой четверти и ограниченной окружностями, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = \cos \varphi$ ,  $\rho = \sin \varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = \arccos x$ ,  $y = \arcsin x$ ,  $x = 0$ .

### Вариант 29

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx; \quad 3) \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx.$$

$$2) \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4};$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{16x dx}{16x^4 - 1}; \quad 2) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y^2 = x^3$ ,  $x = 2$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой и окружностью, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = 6 \cos 3\varphi$ ,  $\rho = 3$  ( $\rho \geq 3$ ). Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = \ln x$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

### Вариант 30

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx; \quad 2) \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx;$$

$$3) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

2 Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4 + 1};$$

$$2) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}.$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y = \arcsin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ . Сделать рисунок.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной двухлепестковой розой, заданной уравнением в полярных координатах:  $\rho = 3 \cos 2\varphi$ . Сделать рисунок.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: 
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = x^3$ ,  $y = x^2$ .

### *Решение типового варианта*

1 Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$$

### *Решение*

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 4, \quad dv = \cos 3x dx \\ du = 2x dx, \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3} (x^2 - 4) \sin 3x \Big|_{-2}^0 - \\ -\frac{2}{3} \int_{-2}^0 x \sin 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin 3x dx \\ du = dx, \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = -\frac{2}{3} \left( -\frac{1}{3} x \cos 3x \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{3} \int_{-2}^0 \cos 3x dx \right) = \\ &= -\frac{2}{3} \left( -\frac{2}{3} \cos 6 + \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_{-2}^0 \right) = \frac{4}{9} \cos 6 - \frac{2}{27} \sin 6; \end{aligned}$$

$$2) \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

*Решение*

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx &= \frac{8}{2} \int_0^{1/2} \frac{dx^2}{1 + 4x^2} - \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \operatorname{arctg} 2x d(\operatorname{arctg} 2x) = \\ &= \ln|1 + 4x^2| \Big|_0^{1/2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg}^2 2x \Big|_0^{1/2} = \ln 2 - 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{16} + 0 = \ln 2 - \frac{\pi^2}{64}; \end{aligned}$$

$$3) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{(9 + x^2)^3}}.$$

*Решение*

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{(9 + x^2)^3}} &= \left| \begin{array}{l} x = 3 \operatorname{tg} t, dx = \frac{3dt}{\cos^2 t} \\ x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \\ x_2 = 3 \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dt}{\sqrt{(9 + 9 \operatorname{tg}^2 t)^3 \cos^2 t}} = \\ &= \frac{3}{27} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 t}{\cos^2 t} dt = \frac{3}{27} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \frac{3}{27} \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{18}. \end{aligned}$$

2) Найти несобственные интегралы или доказать, что они расходятся:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

*Решение*

Дан несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом интегрирования. По определению имеем:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{(x + 2)^2 + 9} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{3} \Big|_1^b = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{b + 2}{3} - \operatorname{arctg} 1 \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Несобственный интеграл сходится;

$$2) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

*Решение*

Так как функция  $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$  не ограничена при  $x \rightarrow 2-0$ , то имеем несобственный интеграл второго рода. Получаем:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^{2-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится.

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат:  $y^2 = x + 1$ ,  $2x + y = 1$ . Сделать рисунок.

*Решение*

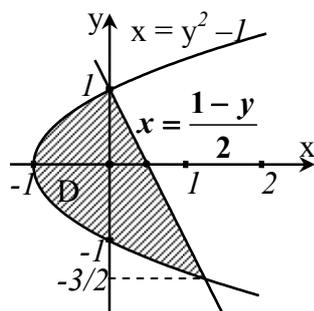


Рисунок 1

Построим данную фигуру (рисунок 1). Найдём ординаты точек пересечения данных линий:

$$\begin{cases} y^2 = x + 1, \\ 2x + y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - x - 1 = 0, \\ y + 2x - 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow 2y^2 + y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{3}{2}, y_2 = 1.$$

$$S = \int_c^d (\varphi(y) - \psi(y)) dy,$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{3}{2}}^1 \left( \frac{1-y}{2} - (y^2 - 1) \right) dy = \int_{-\frac{3}{2}}^1 \left( \frac{3}{2} - \frac{y}{2} - y^2 \right) dy = \\ &= \left( \frac{3}{2}y - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{3}{2}}^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{9}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{24} = \frac{125}{48}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{125}{48}$  кв. ед.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой и окружностью, заданными уравнениями в полярных координатах:  $\rho = 4\cos 3\varphi$  и  $\rho = 2$  ( $\rho \geq 2$ ). Сделать рисунок.

*Решение*

$$\rho_{\min} = 0: \cos 3\varphi = 0 \Rightarrow 3\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \varphi_3 = \frac{5\pi}{6}, \varphi_4 = \frac{7\pi}{6}, \varphi_5 = \frac{3\pi}{2}, \varphi_6 = \frac{11\pi}{6}.$$

$$\rho_{\max} = 3: \cos 3\varphi = 1 \Rightarrow 3\varphi = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi n}{3} \Rightarrow \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \varphi_3 = \frac{4\pi}{3}.$$

Сделаем рисунок (рисунок 2).

Найдем значения  $\varphi$ , при которых трехлепестковая роза и окружность пересекаются:

$$\begin{cases} \rho = 4\cos 3\varphi, \\ \rho = 2; \end{cases} \Rightarrow 4\cos 3\varphi = 2 \Rightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow 3\varphi = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}.$$

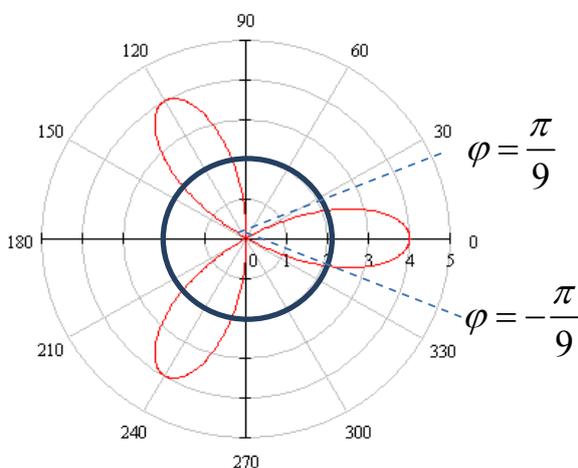


Рисунок 2

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{9}} (16\cos^2 3\varphi - 4) d\varphi =$$

$$= 3 \cdot 16 \int_0^{\frac{\pi}{9}} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} d\varphi - 3 \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{9}} d\varphi =$$

$$= 24 \left( \varphi + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{9}} - 12 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{9}} = 24 \left( \frac{\pi}{9} + \frac{1}{6} \sin \frac{6\pi}{9} \right) - 12 \cdot \frac{\pi}{9} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

Ответ:  $\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$  кв. ед.

5 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

*Решение*

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

$$x' = a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t, \quad y' = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t.$$

$$\text{Тогда } l = \int_0^{\pi} \sqrt{(at \cos t)^2 + (at \sin t)^2} dt = \int_0^{\pi} at dt = a \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2 a}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi^2 a}{2} \text{ ед.}$$

6 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = 2 - x^2$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ .

*Решение*

Сделаем рисунок (рисунок 3).

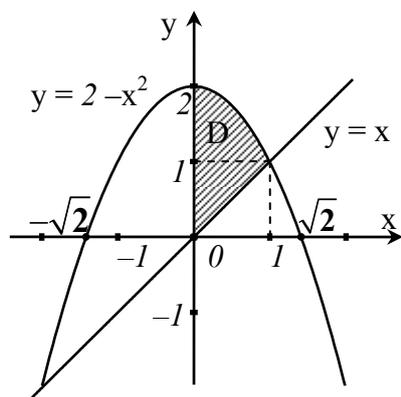


Рисунок 3

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^1 \left( (2 - x^2)^2 - x^2 \right) dx = \pi \int_0^1 (4 - 4x^2 + x^4 - x^2) dx = \\ &= \pi \int_0^1 (4 - 5x^2 + x^4) dx = \pi \left( 4x - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \pi \left( 4 - \frac{5}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{38}{15} \pi. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{38\pi}{15} \text{ куб. ед.}$$

## Список литературы

- 1 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1.
- 2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1986. – Ч. 1.
- 3 **Гусак, А. А.** Высшая математика / А. А. Гусак. – Минск : Тетра-Системс, 1998. – Т. 1.
- 4 Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / Под ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 1.
- 5 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Минск : Выш. шк., 1986. – Ч. 1.
- 6 Сборник задач по курсу высшей математики : учеб. пособие для вузов / Под ред. Г. И. Кручковича. – М. : Высш. шк., 1973.
- 7 Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1968.