ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты индивидуальных заданий для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Могилев 2011

УДК 519.852
ББК 22.143
Л 59

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «15» декабря 2010 г., протокол № 6

Составители: канд. физ.-мат. наук, доц. Л. А. Данилович;
канд. физ.-мат. наук, доц. В. Г. Замураев;
ст. преподаватель С. А. Скрыган

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. К. Крутолевич

В методических указаниях дана программа самостоятельной работы, распределены по вариантам задачи по основным темам раздела «Линейное программирование» курса «Высшая математика», читаемого студентам экономических специальностей. Для каждого задания даны методические указания и приведен образец его выполнения.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнёв
Технический редактор	А. Т. Червинская
Компьютерная верстка	И. А. Алексеюс

Подписано в печать 30.08.2011. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,79. Тираж 165 экз. Заказ № 528.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/375 от 29.06.2004 г.
212000, г. Могилёв, пр. Мира, 43

1 Методические указания и рекомендации для организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа по изучению раздела «Линейное программирование» заключается прежде всего в изучении теоретического материала по рекомендуемой литературе [1]. В процессе изучения теоретического материала следует тщательно разбирать все приводимые в тексте иллюстрации и примеры. Степень понимания и усвоения теории значительно повышается при самостоятельном решении задач. В этом смысле [2, 3] окажут неоценимую помощь, поскольку содержат большое количество подробных задач, в том числе и задач с практическим содержанием. На первых порах весьма полезно для приобретения навыков в решении задач будет самостоятельное решение уже решенных задач со сверкой своего решения с приведенным в пособии. В разделе «Линейное программирование» постоянно используются сведения из общего курса высшей математики. В связи с этим, приступая к изучению тем (раздел 2), необходимо повторить раздел «Линейная алгебра».

2 Программа самостоятельной работы

Тема 1. Линейное программирование

1 Математическая модель задачи линейного программирования.

2 Задача планирования производства.

3 Задача о смесях.

4 Постановка и различные формы записи ЗЛП, переход от одной формы к другой.

5 Геометрическая интерпретация и графическое решение ЗЛП в случае двух переменных.

6 Геометрическая интерпретация и решение ЗЛП в случае n переменных.

7 Опорные планы ЗЛП. Соответствие между опорными планами и вершинами многогранника планов.

8 Вырожденный и невырожденный опорный план. Максимальное число опорных планов.

9 Основная теорема линейного программирования. Схема решения ЗЛП, вытекающая из этой теоремы.

10 Общая идея симплексного метода решения ЗЛП. Геометрическая иллюстрация.

11 Правила выбора переменных, участвующих в преобразовании базиса при переходе от одного опорного плана к другому, более близкому к оптимальному.

12 Признак оптимальности опорного плана ЗЛП.

13 Правила пересчета элементов симплекс-таблицы после выбора

разрешающего элемента.

14 Нахождение оптимального плана ЗЛП с помощью симплексного метода.

15 Признак неограниченности целевой функции на множестве планов. Геометрическая иллюстрация.

16 Признак бесконечности множества оптимальных планов (альтернативный оптимум). Геометрическая иллюстрация.

17 Признак неразрешимости ЗЛП. Геометрическая иллюстрация.

18 Алгоритм симплексного метода.

Тема 2. Двойственность в линейном программировании

19 Понятие двойственности в линейном программировании.

20 Экономические примеры двойственных задач.

21 Построение двойственных задач.

22 Первая теорема двойственности и ее экономическое содержание. Прикладные аспекты теоремы: нахождение оптимального плана двойственной задачи по решению прямой задачи.

23 Вторая теорема двойственности и ее экономическое содержание. Прикладные аспекты теоремы: оценка степени дефицитности ресурсов, оценка целесообразности производства новых видов продукции, оценка убыточности производства продукции, не рекомендованной оптимальным планом.

24 Вторая теорема двойственности и ее экономическое содержание. Прикладные аспекты теоремы.

25 Третья теорема двойственности и ее экономическое содержание. Прикладные аспекты теоремы: расчет норм заменяемости дефицитных ресурсов, целесообразность приобретения дополнительного приобретения дополнительного количества дефицитных ресурсов.

Тема 3. Транспортная задача

26 Постановка транспортной задачи (ТЗ) по критерию стоимости и ее экономико-математическая модель.

27 Особенности модели ТЗ как ЗЛП.

28 ТЗ с открытой и закрытой моделью.

29 Преобразование открытой ТЗ в закрытую.

30 Условие разрешимости ТЗ.

31 Теорема о ранге матрицы системы ограничительных уравнений ТЗ.

32 Циклы в транспортной таблице и их свойства.

33 Построение начального опорного плана ТЗ методом наименьшего элемента.

34 Процедура преобразования опорного плана ТЗ в новый опорный план.

35 Оценка свободной клетки транспортной таблицы и ее экономиче-

ский смысл.

36 Признак оптимальности опорного плана ТЗ. Не единственность оптимального плана.

37 Потенциалы поставщиков и потребителей. Система уравнений для определения потенциалов. Экономический смысл потенциалов.

38 Алгоритм метода потенциалов.

3 Правила выполнения и оформления контрольных заданий

При оформлении контрольных работ надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не засчитываются и возвращаются студенту для переработки.

1 Контрольную работу выполняют в отдельной тетради, на обложке которой студенту следует разборчиво написать номер контрольной работы, название дисциплины, указать свою группу, фамилию, инициалы и номер зачетной книжки.

2 Решение задач необходимо проводить в последовательности, указанной в контрольной работе. При этом условие каждой задачи полностью переписывают перед ее решением. В тетради обязательно оставляют поля.

3 Решение каждой задачи следует излагать подробно, давать необходимые пояснения по ходу решения со ссылкой на используемые формулы. В конце контрольной работы необходимо указать использованную при выполнении контрольной работы литературу.

4 После получения прорецензированной работы, как зачтенной, так и незачтенной, следует исправить отмеченные ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента. Незачтенные задания необходимо выполнить заново.

5 На повторную проверку обязательно предоставляется и ранее прорецензированная работа. Вносить исправления в сам текст работы после рецензирования запрещается.

Номера вариантов задач для контрольной работы следует выбирать по схеме:

– номер варианта соответствует **числу из двух последних цифр**, если это число не более 30;

– если это число больше 30, номер варианта следует брать равным результату вычитания из этого числа 30 до получения числа, не большего 30;

– если две последние цифры 00 , номер варианта равен 10.

Например:

а) номер зачетки заканчивается цифрами 03. Вариант задания равен 3;

б) номер зачетки заканчивается цифрами 66. Вычитаем $66 - 30 = 36 > 30$. Вычитаем еще раз $36 - 30 = 6$. Вариант задания равен 6.

4 Задачи к индивидуальным контрольным заданиям и методические рекомендации для их выполнения

Задание 1

Собственные средства банка вместе с депозитами составляют $\boldsymbol{S}$ млн ден. ед. Не менее $\boldsymbol{a}$ млн ден. ед. этих средств должны быть размещены в кредитах, доходность которых составляет $\boldsymbol{d}_1\,\%$. Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить их в деньги без существенных потерь невозможно. Другое дело ценные бумаги, особенно государственные. Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль или, во всяком случае, без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. Пусть в данном случае ценные бумаги должны составлять не менее $\boldsymbol{b}$ % средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах, а их доходность составляет $\boldsymbol{d}_2\,\%$.

Требуется:

1) составить экономико-математическую модель задачи, позволяющую сформировать оптимальный пакет активов банка, т. е. установить, какую часть собственных средств банка следует разместить в кредитах, а какую вложить в ценные бумаги с тем, чтобы получить максимальную прибыль;

2) решить задачу графическим способом.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице 1.

Таблица 1

Номер варианта	S	*a*	*b*	d_1	d_2
1	2	3	4	5	6
1	120	40	20	12	8
2	85	30	25	16	10
3	110	35	18	14	9
4	95	25	26	18	12
5	105	30	22	15	8
6	150	40	32	12	7
7	120	35	28	20	14
8	115	25	24	13	9
9	80	20	16	15	11
10	130	45	30	17	13
11	120	40	20	12	8
12	85	30	25	16	10
13	110	35	18	14	9
14	95	25	26	18	12
15	105	30	22	15	8

Окончание таблицы 1

1	2	3	4	5	6
16	150	40	32	12	7
17	120	35	28	20	14
18	115	25	24	13	9
19	80	20	16	15	11
20	130	45	30	17	13
21	120	40	20	12	8
22	85	30	25	16	10
23	110	35	18	14	9
24	95	25	26	18	12
25	105	30	22	15	8
26	150	40	32	12	7
27	120	35	28	20	14
28	115	25	24	13	9
29	80	20	16	15	11
30	130	45	30	17	13

Методические указания по выполнению задания 1

Решение задачи начинается с составления экономико-математической модели. В [1–3] обстоятельно разобрано много подобных задач. Смотри, например, [2, гл. 1, с. 11–18; примеры 1.1–1.4]; [3, гл. 2, примеры 2.1–1.5]. Прежде чем приступить к графическому решению задачи, экономико-математическая модель которой составлена, необходимо разобрать теоретический материал, например, по пособию [1, гл. 1, § 1.2]. Смотри также пособие [2, § 1.3, пример 1.16]; [3, § 2.4, примеры 2.10–2.13]. Поскольку чертеж в этой задаче является основным элементом в решении, то его следует выполнить в достаточно крупном масштабе на отдельной странице с использованием чертежных инструментов.

Образец выполнения задания 1

Собственные средства банка вместе с депозитами составляют **100** млн ден. ед. Не менее **35** млн ден. ед. этих средств должны быть размещены в кредитах, доходность которых составляет **15** %. Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить их в деньги без существенных потерь невозможно. Другое дело ценные бумаги, особенно государственные. Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль или, во всяком случае, без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. Пусть в данном случае ценные бумаги должны составлять не менее **30** % средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах, а их доходность составляет **10** %. Требуется сформировать оптимальный пакет активов, максимизирующий прибыль банка.

Решение

Задача заключается в определении оптимального для банка размещения собственных средств и депозитов в кредитах и ценных бумагах, при котором банк получит за рассматриваемый промежуток времени наибольшую прибыль.

Пусть $\boldsymbol{x}_1$ – средства, размещенные в кредитах, $\boldsymbol{x}_2$ – средства, вложенные в ценные бумаги, а $\boldsymbol{F}$ – общая прибыль банка. Значения $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ прежде всего должны удовлетворять балансовому ограничению

$$x_1 + x_2 \le 100, \tag{1}$$

учитывающему возможности банка. Кроме того, необходимо соблюсти кредитное ограничение, что выразится записью

$$x_1 \ge 35, \tag{2}$$

а также ликвидное ограничение, которое в соответствии с условиями задачи можно записать в форме следующего неравенства:

$$x_2 \ge 0{,}3(x_1 + x_2). \tag{3}$$

По смыслу переменных $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ они должны быть неотрицательными:

$$\boldsymbol{x}_1 \ge 0, \;\; \boldsymbol{x}_2 \ge 0. \tag{4}$$

Составим целевую функцию. С учетом доходности прибыль от $\boldsymbol{x}_1$ млн ден. ед., размещенных в кредитах, составит $0{,}15\boldsymbol{x}_1$ млн ден. ед., а от $\boldsymbol{x}_2$ млн ден. ед., вложенных в ценные бумаги, будет равна $0{,}1\boldsymbol{x}_2$ млн ден. ед. Так что общая сумма прибыли составит ($0{,}15\boldsymbol{x}_1$ + $0{,}1\boldsymbol{x}_2$) млн ден. ед. Таким образом, целевая функция, которую нужно максимизировать, запишется в виде

$$\boldsymbol{F} = 0{,}15\boldsymbol{x}_1 + 0{,}1\boldsymbol{x}_2. \tag{5}$$

Итак, математически задача сводится к определению таких значений $\boldsymbol{x}_1^*$ и $\boldsymbol{x}_2^*$, удовлетворяющих линейным ограничениям (1)–(4), при которых целевая функция (5) достигает своего наибольшего значения.

Областью допустимых решений задачи является треугольник $\boldsymbol{ABC}$, ограниченный прямыми $\boldsymbol{AB}$ $(x_1 + x_2 = 100)$, $\boldsymbol{AC}$ $(x_1 = 35)$ и $\boldsymbol{BC}$ $(\boldsymbol{x}_2 = (3/7)\boldsymbol{x}_1)$ (рисунок 1).

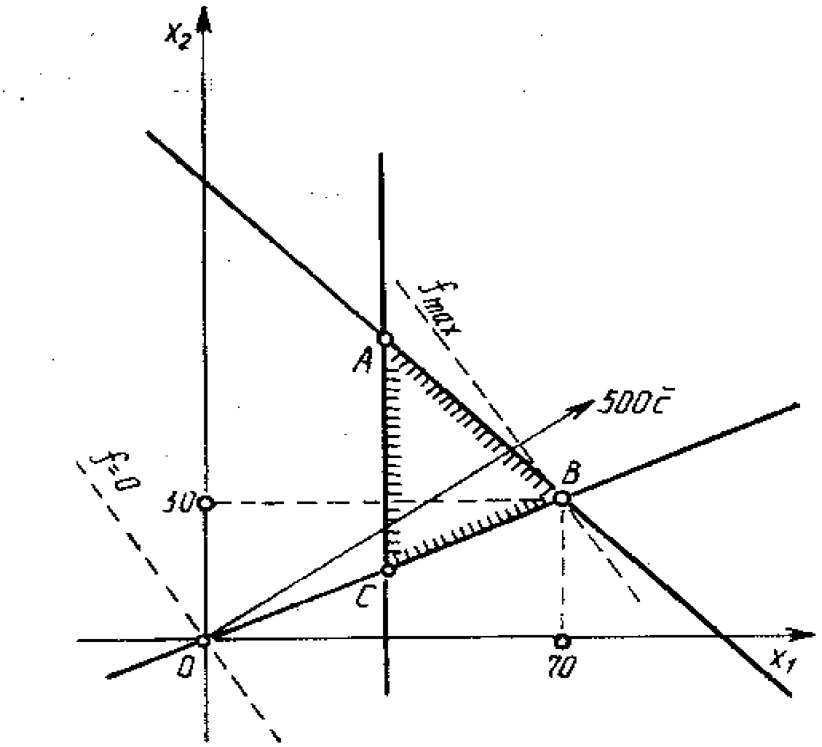

Рисунок 1

Вектор $500\vec{\boldsymbol{c}} = (75; 50)$ указывает направление наискорейшего возрастания целевой функции $\boldsymbol{F}$. Перпендикулярно вектору $\vec{c}$ через начало координат проведена линия уровня – прямая $\boldsymbol{f} = 0$. Параллельным перемещением линии уровня находим точку, в которой целевая функция $\boldsymbol{F}$ достигает наибольшего значения в допустимой области $\boldsymbol{ABC}$. Такой точкой является точка $\boldsymbol{B}$ (точка пересечения прямых $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BC}$). Координаты точки $\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{x}_1^* = 70$ и $\boldsymbol{x}_2^*$=30) находим из системы $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 100, \\ \boldsymbol{x}_2 = \dfrac{3}{7}\boldsymbol{x}_1. \end{cases}$

Имеем оптимальный план задачи $\boldsymbol{X}^* = (70, 30)$. Тогда $\boldsymbol{F}_{\max} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1^*; \boldsymbol{x}_2^*) = \boldsymbol{F}(70; 30) = 0{,}15 \cdot 70 + 0{,}1 \cdot 30 = 13{,}5.$

Таким образом, для получения максимальной прибыли в 13,5 млн ден. ед. банку следует разместить в кредитах 70 млн ден. ед. и 30 млн ден. ед. вложить в ценные бумаги.

Задание 2

Для изготовления четырех видов продукции $\mathbf{П}_\mathbf{j}$ $(j=\overline{1,4})$ используют три вида сырья $\mathbf{P}_\mathbf{i}$ $(i=\overline{1,3})$. Количество сырья $\boldsymbol{a_{ij}}$ вида i $(i=\overline{1,3})$, необходимое для изготовления единицы продукции вида j $(j=\overline{1,4})$, запасы сырья $\boldsymbol{b_i}$ и прибыль $\boldsymbol{c_j}$ от реализации единицы продукции вида j заданы матрицей

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & Z \end{bmatrix}.$$

Требуется:

1) составить экономико-математическую модель задачи, позволяющую найти сбалансированный по ресурсам план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальный доход;

2) симплексным методом найти оптимальный план выпуска продукции и максимальную величину прибыли; дать содержательный ответ, вскрыв экономический смысл всех переменных, участвующих в решении задачи;

3) составить двойственную задачу и, используя решение исходной задачи и соответствие между двойственными переменными, найти компоненты оптимального плана двойственной задачи – двойственные оценки $\boldsymbol{y_i^*}$ $(i=\overline{1,3})$;

4) провести анализ используемых ресурсов, выпускаемой продукции, дополнительных переменных прямой и двойственной задачи.

Числовые данные приведены в таблицах 2–4.

Таблица 2

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_{11}	1	3	5	4	3	2	2	1	2	1
a_{12}	4	2	6	2	2	4	4	2	6	2
a_{13}	2	1	2	1	3	2	1	3	5	4
a_{14}	2	2	2	5	2	4	2	2	2	5
a_{21}	2	2	2	2	2	3	4	2	6	4
a_{22}	2	4	4	3	1	4	2	4	4	3

Окончание таблицы 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_{23}	4	2	6	4	2	4	2	2	2	2
a_{24}	3	3	4	2	3	3	3	3	4	2
a_{31}	2	4	1	3	2	5	0	3	3	5
a_{32}	3	3	2	4	4	1	3	3	2	4
a_{33}	0	3	3	5	2	3	2	4	1	3
a_{34}	5	4	4	2	3	42	5	4	4	2
b_1	50	30	60	60	50	30	50	30	60	60
b_2	40	40	80	40	20	40	40	40	80	40
b_3	40	20	40	40	30	80	40	20	40	40
c_1	3	5	4	6	7	6	8	7	4	6
c_2	5	6	5	9	8	8	5	6	5	9
c_3	8	7	4	6	6	4	3	5	4	6
c_4	6	6	6	8	5	6	6	6	6	8

Таблица 3

Номер варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_{11}	3	2	2	4	1	3	2	5	2	2
a_{12}	2	4	3	3	2	4	4	1	2	1
a_{13}	3	2	0	3	3	5	2	3	1	3
a_{14}	3	4	5	4	4	2	3	4	4	2
a_{21}	2	4	2	2	2	2	2	3	3	3
a_{22}	1	4	2	4	4	3	1	4	4	2
a_{23}	2	3	4	2	6	4	2	4	2	2
a_{24}	3	3	3	3	4	2	3	3	2	4
a_{31}	2	3	1	3	5	4	3	2	5	4
a_{32}	4	1	4	2	6	2	2	4	0	3
a_{33}	2	5	2	1	2	1	3	2	2	4
a_{34}	3	4	2	2	2	5	2	4	3	3
b_1	50	30	50	30	60	60	50	30	50	30
b_2	20	40	40	40	80	40	20	40	40	40
b_3	30	80	40	20	40	40	30	80	40	20
c_1	6	4	3	5	4	6	7	6	6	6
c_2	8	8	5	6	5	9	8	8	8	7
c_3	7	6	8	7	4	6	6	4	3	5
c_4	5	6	6	6	6	8	5	6	5	6

Таблица 4

Номер варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a_{11}	2	5	2	4	4	1	4	2	2	5
a_{12}	2	1	3	2	2	2	2	4	4	1
a_{13}	5	4	3	2	2	3	3	5	3	4
a_{14}	6	2	2	4	1	2	1	3	2	3
a_{21}	4	2	3	3	2	2	4	2	2	3
a_{22}	6	4	2	4	3	4	4	3	1	4
a_{23}	2	2	2	4	4	2	6	4	3	3
a_{24}	4	3	1	3	2	3	2	2	2	4
a_{31}	4	2	3	4	3	3	2	5	3	2
a_{32}	3	5	2	3	5	3	6	2	2	4
a_{33}	1	3	2	5	0	4	2	1	2	4
a_{34}	2	4	4	1	2	4	5	4	3	2
b_1	60	60	50	30	50	30	60	60	50	30
b_2	80	40	20	40	40	40	80	40	20	40
b_3	40	40	30	80	40	20	40	40	30	80
c_1	6	8	5	6	5	7	6	8	7	6
c_2	4	6	6	4	6	6	5	9	8	8
c_3	4	6	7	6	8	5	4	6	5	6
c_4	5	9	8	8	3	6	4	6	6	4

Методические указания по выполнению задания 2

После составления экономико-математической модели переходят к решению задачи симплекс-методом. С этой целью, прежде всего, модель преобразуют к канонической форме, вводя в ограничения-неравенства дополнительные переменные. Только после этого реализуется направленный перебор опорных планов и поиск среди них оптимального. При этом если ограничения-неравенства имеют вид «$\le$», то неотрицательные дополнительные переменные прибавляются к левым частям неравенств. В этом случае дополнительные переменные образуют начальный базис, в котором базисное решение будет опорным планом, и предстоящая вычислительная процедура (симплексные преобразования) состоит в последовательном переборе опорных планов и поиске среди них оптимального опорного плана. Если же ограничения-неравенства имеют вид « $\ge$ », то неотрицательные дополнительные переменные вычитаются из левых частей неравенств и в образовавшемся базисе базисное решение опорным не является, а поэтому первоочередная задача состоит в том, чтобы выделить такой базис переменных, в котором базисное решение будет опорным. Только после этого осуществляется направленный перебор опорных планов и поиск среди них оптимального. Оба указанных случая иллюстрируются в пособиях [1–3] большим количеством примеров. Смотри, например, [3, гл. 3, § 3.1]. Построение и решение двойственной задачи подробно разобрано в [3, гл. 4, § 4.1, 4.2]. Решая задачу, необходимо помнить, что в задачах с экономическим содержанием все переменные имеют вполне определенный экономический смысл (например, обозначают резервы применяющихся в производстве ресурсов), на что необходимо указать, когда будет формулироваться содержательный ответ решенной задачи.

Образец выполнения задания 2

Для изготовления четырех видов продукции $\mathbf{П_j}$ $(j = \overline{1,4})$ используют три вида сырья $\mathbf{P_i}$ $(i = \overline{1,3})$. Количество сырья $\boldsymbol{a_{ij}}$ вида i $(i = \overline{1,3})$, необходимое для изготовления единицы продукции вида j $(j = \overline{1,4})$, запасы сырья $\boldsymbol{b_i}$ и прибыль $\boldsymbol{c_j}$ от реализации единицы продукции вида j заданы матрицей

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 24 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 12 \\ 6 & 0 & 3 & 1 & 35 \\ 4 & 2 & 5 & 8 & Z \end{bmatrix}.$$

Требуется:

1) составить экономико-математическую модель задачи, позволяющую найти сбалансированный по ресурсам план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальный доход;

2) симплексным методом найти оптимальный план выпуска продукции и максимальную величину прибыли; дать содержательный ответ, вскрыв экономический смысл всех переменных, участвующих в решении задачи;

3) составить двойственную задачу и, используя решение исходной задачи и соответствие между двойственными переменными, найти компоненты оптимального плана двойственной задачи – двойственные оценки $\boldsymbol{y_i^*}$ $(\mathrm{i} = \overline{1,3})$;

4) провести анализ используемых ресурсов, выпускаемой продукции, дополнительных переменных прямой и двойственной задачи.

Решение

Пусть $\boldsymbol{x_j}$ – объемы выпускаемой продукции $\mathbf{П_j}$ $(j=\overline{1,4})$. Тогда $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ – план задачи. Так как $\boldsymbol{c_j}$ – цена единицы продукции j-го вида, то общий доход составит $Z=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4$, т. е. для нашей задачи имеем

$$Z=4x_1+2x_2+5x_3+8x_4.$$

Полученное выражение является целевой функцией, которую нужно максимизировать.

Так как $\boldsymbol{a_{ij}x_j}$ – расход i-го вида сырья на производство $\boldsymbol{x_j}$ единиц продукции j-го вида, то, просуммировав расход i-го ресурса на выпуск всех четырех видов продукции, получим общий расход этого ресурса, который не должен превосходить $\boldsymbol{b_i}$ единиц:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4 \le b_i \qquad (i=\overline{1,3}).$$

Чтобы искомый план был реален, нужно наложить условие неотрицательности на объемы $\boldsymbol{x_j}$ выпуска продукции: $x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,4})$.

Таким образом, экономико-математическая модель задачи следующая: найти

$$\max\ Z=3x_1+7x_2+4x_3+2x_4$$

при наличии системы ограничений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+8x_4 \le 24, \\ 3x_1+5x_2+x_3 \le 12, \\ 6x_1+3x_3+x_4 \le 35, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \quad j=\overline{1,4}.$$

Построим начальный опорный план задачи. Для этого приведем задачу к каноническому виду, добавив к левым частям системы ограничений дополнительные переменные $x_j \ge 0 \quad (j=\overline{5,7})$. В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю.

Получаем задачу в канонической форме записи:

$$\max Z = 4x_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + 45x_3 + 8x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 0\cdot x_7,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 = 24, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + \qquad x_6 = 12, \\ 6x_1 + \qquad 3x_3 + x_4 + x_7 = 35, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,7}.$$

Решим задачу симплексным методом. Анализируя каноническую модель задачи, замечаем, что каждая из переменных x_5, x_6, x_7 входит только в одно из уравнений системы, т. е. эти переменные входят в систему ограничений в предпочтительном виде и их можно взять в качестве базисных. Переменные x_1, x_2, x_3, x_4 будут свободными. Составляем первую симплекс-таблицу (таблица 5).

Таблица 5

БП	1	С П			
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$x_5 =$	24	1	2	4	**8**
$x_6 =$	12	3	5	1	0
$x_7 =$	35	6	0	3	1
$\boldsymbol{Z} =$	0	–4	–2	–5	–8

Рабочая часть таблицы, начиная со 2-го столбца и 3-й строки, содержит элементы расширенной матрицы, над которыми будут производиться преобразования с целью получения оптимального плана. В последней строке таблицы записано «нулевое» уравнение (целевая функция $\boldsymbol{Z}$). Эта строка называется *индексной* или *строкой оценок.* В столбец БП занесены базисные (предпочтительные) переменные. Столбец 1 содержит свободные члены $\boldsymbol{b_i} \geq 0$ системы ограничений. Сверху над рабочей областью таблицы указаны свободные переменные (СП). Все элементы столбца свободных членов положительны, поэтому план $\boldsymbol{X}_1^0 = (0;\,0;\,0;\,0;\,24;\,12;\,35)$ является опорным. Однако этот план не является оптимальным, т. к. в $\boldsymbol{Z}$-строке имеются отрицательные элементы.

Чтобы получить новый опорный план, более близкий к оптимальному, выполним симплексные преобразования первой симлекс-таблицы (таблица 3). Наибольший по модулю отрицательный элемент (–8) $\boldsymbol{Z}$-строки указывает, что в новый базис следует ввести переменную x_4, т. е. в качестве разрешающего надо взять четвертый столбец рабочей части таблицы. Чтобы определить переменную, выводимую из базиса, составим симплексные отношения и выберем наименьшее из них:

$$\min\left(\frac{24}{8}; \frac{35}{1}\right) = 3.$$

Итак, из базиса исключаем переменную $\boldsymbol{x}_5$. Первая строка является разрешающей. На пересечении разрешающего столбца и строки находится разрешающий элемент 8, с которым и выполняем симплексные преобразования. Получаем вторую симплексную таблицу (таблица 6).

Таблица 6

БП	1	С П			
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
x_4 =	3	1/8	1/4	1/2	1/8
x_6 =	12	**<u>3</u>**	5	1	0
x_7 =	32	47/8	−1/4	5/2	−1/8
$\boldsymbol{Z}$ =	24	−3	0	−1	1

В $\boldsymbol{Z}$-строке есть отрицательный элемент, следовательно, опорный план $X_2^0 = (0;\ 0;\ 0;\ 3;\ 0;\ 12;\ 32)$ оптимальным не является. Для улучшения этого плана выполняем очередные симплексные преобразования с разрешающим элементом **3**. В результате получаем симплекс-таблицу (таблица 7), в $\boldsymbol{Z}$-строке которой нет отрицательных элементов.

Таблица 7

БП	1	С П			
		$-x_6$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
x_4 =	2,5				
x_1 =	4				
x_7 =	8,5				
$\boldsymbol{Z}$ =	36	1	5	0	1

Итак, опорный план $\boldsymbol{X}_3^0 = (4;\ 0;\ 0;\ 2{,}5;\ 0;\ 0;\ 8{,}5) = \boldsymbol{X}^*$ является оптимальным, а соответствующее ему значение целевой функции $Z(X^*)$ = 36 будет максимальным. Таким образом, общий доход равен 36 ден. ед. По оптимальному плану следует изготовить 4 единицы продукции $\mathbf{П}_1$ и 2,5 единицы продукции $\mathbf{П}_4$.

Перейдем к построению **математической модели двойственной задачи**. В качестве переменных двойственной задачи возьмем y_1, y_2, y_3, представляющие собой условные запасы ресурсов. Учитывая взаимосвязь между парами двойственных задач, модель двойственной задачи имеет вид:

$$\min F = 24y_1 + 12y_2 + 35y_3,$$
$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 6y_3 \ge 4, \\ 2y_1 + 5y_2 \ge 2, \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 5, \\ 8y_1 + y_3 \ge 8, \end{cases}$$
$$y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,3}).$$

Перейдя к канонической форме записи, получаем

$$\min \boldsymbol{F} = 24\boldsymbol{y}_1 + 12\boldsymbol{y}_2 + 35\boldsymbol{y}_3;$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{y}_2 + 6\boldsymbol{y}_3 - \boldsymbol{y}_4 = 4, \\ 2\boldsymbol{y}_1 + 5\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_5 = 2, \\ 4\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{y}_3 - \boldsymbol{y}_6 = 5, \\ 8\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_3 - \boldsymbol{y}_7 = 8, \end{cases}$$
$$y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,7}).$$

В канонической форме прямой задачи переменные x_1, x_2, x_3, x_4 являются свободными, а дополнительные переменные x_5, x_6, x_7 – базисными. В канонической форме двойственной задачи свободными переменными будут y_1, y_2, y_3, а базисными – y_4, y_5, y_6, y_7. Соответствие между переменными прямой и двойственной задач имеет вид:

$$\begin{array}{cccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Отсюда имеем оптимальный план двойственной задачи $\boldsymbol{Y}^* = (1; 1; 0; 0; 5; 0; 0)$.

Из теорем двойственности следует, что экстремальные значения целевых функций разрешимых двойственных задач совпадают, т. е. $\boldsymbol{F}_{\mathbf{min}} = \boldsymbol{Z}_{\mathbf{max}} = 36$. При оптимальном плане оценка ресурсов, затраченных на выпуск продукции, совпадает с оценкой произведенной продукции.

Установим степень дефицитности используемых ресурсов. Дефицитный ресурс имеет положительную оценку, а ресурс избыточный – нулевую. Степень дефицитности используемых ресурсов производим в ограничениях-неравенствах прямой задачи путем подстановки оптимального плана производства $\boldsymbol{X}^{*} = (4;\, 0;\, 0;\, 2{,}5;\, 0;\, 0;\, 8{,}5)$.

Произведем оценку ресурсов P_1, P_2:

$$4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot 25 = 24\,,$$
$$3 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 12\,.$$

Первое и второе ограничения прямой задачи выполняются как строгие равенства. Это свидетельствует о дефицитности ресурсов P_1, P_2. Именно поэтому в оптимальном плане $\boldsymbol{Y}^{*} = (1;\, 1;\, 0;\, 0;\, 5;\, 0;\, 0)$ двойственной задачи $\boldsymbol{y}_1^{*} = 1,\ \boldsymbol{y}_2^{*} = 1$, т. е. выражаются положительным числом.

Произведем оценку ресурса P_3:

$$6 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2{,}5 = 26{,}5 < 35\,.$$

Третье ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство. Это означает, что расход P_3 меньше его запаса, т.е. ресурс избыточный. Именно поэтому в оптимальном плане $\boldsymbol{Y}^{*} = (1;\, 1;\, 0;\, 0;\, 5;\, 0;\, 0)$ двойственной задачи $\boldsymbol{y}_3^{*} = 0$, т. е. имеет нулевую оценку.

Поясним, почему вошла в оптимальный план продукция $\mathbf{П}_1$ и $\mathbf{П}_4$ и не вошла продукция $\mathbf{П}_2$ и $\mathbf{П}_3$. Оценку продукции производим в ограничениях-неравенствах двойственной задачи путем подстановки оптимального плана $\boldsymbol{Y}^{*} = (1;\, 1;\, 0;\, 0;\, 5;\, 0;\, 0)$.

Произведем анализ продукции $\mathbf{П}_1$ и $\mathbf{П}_4$:

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 4\,,$$
$$8 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 8\,.$$

Первое и третье ограничения двойственной задачи выполняются как строгие равенства. Это свидетельствует о том, что выпуск продукции $\mathbf{П}_1$ и $\mathbf{П}_4$ оправдан, поскольку оценка израсходованных ресурсов совпадает с оценкой произведенной продукции.

Произведем анализ продукции $\mathbf{П}_2$ и $\mathbf{П}_3$:

$$2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 7 > 2\,,$$
$$4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 5\,.$$

Второе ограничение двойственной задачи выполняется как строгое неравенство. Это свидетельствует о том, что выпуск продукции $\mathbf{П}_2$ нецелесообразен, поскольку оценка израсходованных ресурсов превышает суммарную оценку продукции. Что же касается продукции $\mathbf{П_3}$, то по всем показателям ее выпуск оправдан, однако она не входит в оптимальный план задачи, можно предположить, что это связано с внутренними проблемами производства.

Произведем анализ дополнительных переменных прямой и двойственной задачи. Дополнительные переменные прямой задачи указывают количество неиспользованного ресурса. Так, ресурсы $\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}$ использованы полностью $(x_5 = 0, x_6 = 0)$, а $x_7 = 8{,}5$ говорит о количестве неиспользованного ресурса $\boldsymbol{P}_3$. Дополнительные переменные двойственной задачи являются мерой убыточности выпускаемой продукции. По оптимальному плану следует выпускать продукцию $\mathbf{П}_1$, $\mathbf{П_4}$. Оценки $\boldsymbol{y}_4^*, \boldsymbol{y}_7^*$ этих видов продукции равны нулю. Продукция $\mathbf{П_2}$ не вошла в оптимальный план $(y_5^* = 5)$. Оценка убыточной продукции показывает, насколько будет снижать каждая изготовленная единица такой продукции достигнутый максимальный уровень выручки.

Задание 3

Имеется три поставщика и пять потребителей некоторой продукции. Количество груза $\boldsymbol{a_i}$, которое может отгрузить поставщик $\boldsymbol{i}$ $(\boldsymbol{i} = \overline{1,3})$, потребности в грузе $\boldsymbol{b_j}$ $(\boldsymbol{j} = \overline{1,5})$ и стоимость перевозки из пункта $\boldsymbol{i}$ в пункт $\boldsymbol{j}$ единицы груза $\boldsymbol{c_{ij}}$ заданы матрицей

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & a_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & a_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & Z \end{bmatrix}.$$

Требуется:

1) составить экономико-математическую модель задачи;

2) составить начальный опорный план задачи методом минимального элемента;

3) найти методом потенциалов оптимальный план перевозок продукции, при котором общие транспортные затраты будут наименьшими;

4) вычислить суммарные транспортные затраты $\boldsymbol{Z_{min}}$.

Числовые данные приведены в таблицах 8–10.

Таблица 8

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_{11}	1	1	3	3	3	2	2	3	1	2
c_{12}	3	2	2	5	2	2	1	1	3	3
c_{13}	2	3	1	2	4	3	3	2	2	5
c_{14}	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4
c_{15}	2	2	3	2	3	2	2	2	3	2
c_{21}	5	4	4	3	4	5	6	8	6	6
c_{22}	4	3	5	8	5	4	5	4	4	3
c_{23}	6	8	6	6	8	8	4	3	5	8
c_{24}	5	5	4	8	3	5	5	5	4	8
c_{25}	8	6	2	5	2	6	8	6	2	5
c_{31}	4	3	3	2	3	3	8	6	5	5
c_{32}	8	6	10	1	10	6	4	3	3	2
c_{33}	8	6	5	5	5	8	8	6	10	1
c_{34}	6	6	6	3	6	6	6	6	6	3
c_{35}	5	6	3	4	3	5	5	6	3	4
b_1	200	220	200	180	220	220	190	180	160	160
b_2	150	170	190	170	170	170	200	220	200	180
b_3	190	180	160	160	180	180	150	170	190	170
b_4	160	190	200	200	190	190	160	190	200	200
b_5	200	140	150	190	140	140	200	140	150	190
a_1	320	300	320	310	300	3820	320	300	320	310
a_2	360	260	220	360	280	280	360	260	220	360
a_3	220	340	360	230	320	320	220	340	360	230

Таблица 9

Номер варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c_{11}	4	3	4	3	3	2	3	3	2	2
c_{12}	3	2	8	6	10	1	10	6	4	4
c_{13}	2	2	8	6	5	5	5	8	2	3
c_{14}	2	4	6	6	6	3	6	6	3	2
c_{15}	3	2	5	6	3	4	3	5	1	1
c_{21}	8	8	1	1	3	3	4	2	8	6
c_{22}	4	5	3	2	2	5	2	2	5	5
c_{23}	5	4	2	3	1	2	4	3	6	8
c_{24}	3	5	4	4	4	4	2	4	4	3

Окончание таблицы 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c_{25}	2	6	2	2	3	2	3	2	5	4
c_{31}	5	8	5	4	4	3	3	5	5	6
c_{32}	3	3	4	3	5	8	5	4	6	6
c_{33}	10	6	6	8	6	6	8	8	8	6
c_{34}	6	6	5	5	4	8	3	5	8	6
c_{35}	3	5	8	6	2	5	2	6	4	3
b_1	160	220	190	180	160	160	200	220	200	180
b_2	200	170	200	220	200	180	150	170	190	170
b_3	190	180	150	170	190	170	190	180	160	160
b_4	200	190	160	190	200	200	160	190	200	200
b_5	150	140	200	140	150	190	200	140	150	190
a_1	300	300	320	300	320	310	300	3820	320	300
a_2	280	280	360	260	220	360	280	280	360	260
a_3	320	320	220	340	360	230	320	320	220	340

Таблица 10

Номер варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c_{11}	3	2	3	2	2	4	5	4	3	2
c_{12}	4	4	2	4	3	2	10	2	2	3
c_{13}	1	2	4	3	1	3	3	2	2	2
c_{14}	2	5	2	2	2	1	6	3	4	4
c_{15}	3	3	3	2	4	2	3	1	3	2
c_{21}	2	5	2	6	6	5	1	5	2	5
c_{22}	4	8	3	5	4	3	2	8	3	8
c_{23}	6	6	8	8	5	8	3	6	5	4
c_{24}	5	8	5	4	8	4	4	4	8	5
c_{25}	4	3	4	5	5	6	3	5	4	6
c_{31}	3	4	3	5	8	6	6	6	3	3
c_{32}	6	3	6	6	8	6	5	5	6	8
c_{33}	5	5	5	8	4	6	4	8	10	6
c_{34}	10	1	10	6	5	3	4	8	5	6
c_{35}	3	2	3	3	6	6	2	4	3	5
b_1	150	190	140	140	190	190	160	160	140	220
b_2	200	200	190	190	150	170	190	200	190	180
b_3	160	160	180	180	200	180	200	190	170	170
b_4	190	170	170	170	200	220	200	150	180	190

Окончание таблицы 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b_5	200	180	220	220	160	140	150	200	220	140
a_1	320	310	300	3820	320	300	320	310	300	300
a_2	220	360	280	280	360	260	220	360	280	280
a_3	360	230	320	320	220	340	360	230	320	320

Методические указания по выполнению задания 3

При решении транспортной задачи вначале следует проверить условие равенства суммарного запаса груза и суммарного спроса на него. Если это равенство не выполняется, то вводят фиктивного потребителя или поставщика. После составления экономико-математической модели переходят к построению начального опорного плана задачи. Для построения начального опорного плана задачи используются следующие методы: метод «северо-западного угла», метод «минимального элемента», метод Фогеля. Все указанные методы иллюстрируются в пособиях [1–3] большим количеством примеров. Смотри, например, [3, гл. 5, § 5.2, примеры 5.3–5.5]. Для нахождения оптимального плана транспортной задачи используют метод потенциалов. Смотри, например, [3, гл. 5, § 5.4, примеры 5.8–5.10]. В ходе решения задачи нужно постоянно следить за тем, чтобы число клеток, занятых каждым опорным планом, было равно $m+n-1$. Если же число заполненных клеток окажется меньше указанного числа, то недостающее число клеток загружают нулевыми поставками и считают такие клетки занятыми. При этом клетка с нулевой поставкой не должна образовывать цикл с другими заполненными клетками. Если такое произошло, то нулевую поставку надо поместить в какую-нибудь другую клетку таблицы.

Образец выполнения задания 3

Имеется три поставщика и пять потребителей некоторой продукции. Количество груза $\boldsymbol{a_i}$, которое может отгрузить поставщик i $(i=\overline{1,3})$, потребности в грузе $\boldsymbol{b_j}$ $(j=\overline{1,5})$ и стоимость перевозки из пункта $\boldsymbol{i}$ в пункт $\boldsymbol{j}$ единицы груза $\boldsymbol{c_{ij}}$ заданы матрицей

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & a_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & a_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 310 \\ 3 & 8 & 6 & 10 & 5 & 360 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 230 \\ 140 & 190 & 180 & 170 & 220 & Z \end{bmatrix}.$$

Требуется составить экономико-математическую модель задачи и найти методом потенциалов оптимальный план перевозки груза, при котором общие транспортные затраты будут наименьшими.

Решение

Строим математическую модель задачи. Через $\boldsymbol{x_{ij}}$ обозначим объем продукции, доставленный от поставщика $\boldsymbol{A_i}$ $(i = \overline{1,3})$ потребителю $\boldsymbol{B_j}$ $(j = \overline{1,5})$. Отметим, что в данном случае сумма количества продукции, которую могут отгрузить все поставщики, совпадает с суммой потребностей потребителей: 310 + 360 + 230 = 140 + 190 + 180 + 170 + 220 = 900. Значит, задача закрытого типа и имеет решение.

Математическая модель задачи принимает вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 310, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 360, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 230, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 140, \; x_{12} + x_{22} + x_{32} = 190, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 180, \; x_{14} + x_{24} + x_{34} = 170, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 220, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 \; (i = 1, 2, 3; \; j = \overline{1,5}).$$

Строим начальную распределительную таблицу 11.

Таблица 11

A_i	B_j						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\boldsymbol{a_i}$	$\boldsymbol{u_i}$
A_1	5	3	2 **90**	4	1 **220**	310	–4
A_2	+ 3 *	– 8 **100**	6 **90**	10 **170**	5	360	0
A_3	1 **140** –	2 **90** +	3	5	4	230	–6
$\boldsymbol{b_j}$	140	190	180	170	220	900	
$\boldsymbol{v_j}$	7	8	6	10	5		

Построенному опорному решению отвечают затраты:

$$Z_1 = 90·2 + 220·1 + 100·8 + 90·6 + 170·10 + 140·1 + 90·2 = 3760.$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность. Для этого i-й строке и j-му столбцу ставим в соответствие числа u_i и v_j (потенциалы). Для каждой занятой клетки потенциалы должны удовлетворять условию

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Потенциалы поставщиков и потребителей определим непосредственно в таблице, положив $u_2 = 0$.

Вычислим оценки S_{ij} свободных клеток по формуле $S_{ij} = C'_{ij} - (u_i + v_j)$:

$S_{11} = 5 - (-4 + 7) = 2;$
$S_{12} = 3 - (-4 + 8) = -1;$
$S_{14} = 4 - (-4 + 10) = -2;$
$S_{35} = 4 - (-6 + 5) = 5;$
$S_{21} = 3 - (0 + 7) = -4;$
$S_{25} = 5 - (0 + 5) = 0;$
$S_{33} = 3 - (-6 + 6) = 3;$
$S_{34} = 5 - (-6 + 10) = 1.$

В силу критерия оптимальности опорного плана (все оценки S_{ij} неотрицательны) делаем вывод, что построенный план не оптимален, т. к. среди оценок есть отрицательные. В базис введем переменную x_{21} (отвечающую наибольшей по модулю отрицательной оценке) и строим замкнутый цикл с вершинами в загруженных клетках. Загрузим клетку (2; 1). Для этого построим для клетки (2; 1) замкнутый цикл с вершинами в загруженных клетках. Означиваем контур, расставляя в вершинах поочередно, начиная с клетки (2; 1), знаки «+» и «–». Из поставок в «отрицательных» клетках контура выбираем наименьшее λ ($\lambda = \min(140; 100) = 100$) и перераспределяем продукцию вдоль цикла: прибавляем 100 к значениям в клетках со знаком «+» и вычитаем из значений в клетках со знаком «–». В результате приходим к таблице 12.

Полученному решению отвечают затраты:

$$Z_2 = 90·2 + 220·1 + 100·3 + 90·6 + 170·10 + 40·1 + 190·2 = 3360.$$

Проверяем полученный план на оптимальность и получаем, что $S_{34} = -3 < 0$. Значит, решение не оптимальное и строим в таблице 6 новый цикл для клетки (3; 4). Так как min(170,40) = 40 ,то перераспределяем продукцию вдоль контура, прибавляя 40 к значениям в клетках со знаком «+»

и вычитая из значений в клетках со знаком «–». В результате получаем таблицу 13.

Таблица 12

A_i	B_j						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	5	3	2 **90**	4	1 **220**	310	–4
A_2	+ 3 **100**	8	6 **90**	– 10 **170**	5	360	0
A_3	1 **40** –	2 **190**	3	5 * +	4	230	–2
b_j	140	190	180	170	220	900	
v_j	3	4	6	10	5		

Таблица 13

A_i	B_j						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	5	3	2 **90** –	4 + –	1 **220**	310	–4
A_2	3 **140**	8	6 **90** +	10 **130** –	5	360	0
A_3	1	2 **190**	3	5 **40**	4	230	–5
b_j	140	190	180	170	220	900	
v_j	3	7	6	10	5		

Полученному решению отвечают затраты:

$$Z_3 = 90 \cdot 2 + 220 \cdot 1 + 140 \cdot 3 + 90 \cdot 6 + 130 \cdot 10 + 190 \cdot 2 + 40 \cdot 5 = 3240.$$

Аналогично предыдущему, проверяем полученный план на оптимальность. Получаем, что $S_{14} = -2 < 0$. Теперь для улучшения плана загрузим клетку (1,4). В итоге приходим к таблице 14.

$$Z_4 = 90 \cdot 4 + 220 \cdot 1 + 140 \cdot 3 + 180 \cdot 6 + 40 \cdot 10 + 190 \cdot 2 + 40 \cdot 5 = 3060.$$

Таблица 14

A_i	B_j						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	5	3	2	4 **90** +	1 **220** –	310	–6
A_2	3 **140**	8	б **180**	10 **40** –	5 +	360	0
A_3	1	2 **190**	3	5 **40**	4	230	–5
b_j	140	190	180	170	220	900	
v_j	3	7	6	10	7		

Среди оценок свободных клеток имеем $S_{25} = –2 < 0$, следовательно, полученный план перевозок не является оптимальным и для его улучшения необходимо загрузить клетку (2,5). В итоге вычислений приходим к таблице 15.

Таблица 15

A_i	B_j						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	5	3	2	4 **130**	1 **180**	310	–4
A_2	3 **140**	8	б **180**	10	5 **40**	360	0
A_3	1	2 **190**	3	5 **40**	4	230	–3
b_j	140	190	180	170	220	900	
v_j	3	5	6	8	5		

$$Z_5 = 130 \cdot 4 + 180 \cdot 1 + 140 \cdot 3 + 180 \cdot 6 + 40 \cdot 5 + 190 \cdot 2 + 40 \cdot 5 = 2980.$$

Полученный план оказывается оптимальным, так как все оценки незагруженных клеток неотрицательны. По этому плану перевозок первый поставщик отправляет 130 ед. продукции – потребителю B_4 и 180 ед. – B_5; второй поставщик – 140 ед. – потребителю B_1, 180 ед. – потребителю B_3 и 40 ед. – потребителю B_5; третий поставщик – 190 ед. – потребителю B_2 и 40 ед. – потребителю B_4.

Список литературы

1 **Кузнецов, А. В.** Высшая математика. Математическое программирование : учеб. пособие / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск : Выш. шк., 1994. – 286 с.

2 **Кузнецов, А. В.** Руководство к решению задач по математическому программированию : учеб. пособие / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск : Выш. шк., 1995. – 382 с.

3 **Кузнецов, А. В.** Руководство к решению задач по математическому программированию : учеб. пособие / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Выш. шк., 2001. – 448 с.