МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Могилев 2022

УДК 517
ББК 22.1я 73
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» ноября 2021 г., протокол № 3

Составитель ст. преподаватель А. Н. Бондарев

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

Методические рекомендации к практическим занятиям по теме «Дифференцирование функций одной переменной» предназначены для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения. Изложены теоретические вопросы, разобраны образцы решения задач, приведены задачи для самостоятельного решения и задания для домашней работы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА.
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	М. М. Дударева

Подписано в печать . Формат 60´ 84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Производная функции. Правила и формулы дифференцирования 4
1.1 Теоретическая часть 4
1.2 Образцы решения примеров 6
1.3 Примеры для самостоятельной работы 8
1.4 Домашнее задание 9
2 Производные неявно и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование 10
2.1 Теоретическая часть 10
2.2 Образцы решения примеров 10
2.3 Примеры для самостоятельной работы 12
2.4 Домашнее задание 13
3 Производные высших порядков 13
3.1 Теоретическая часть 13
3.2 Образцы решения примеров 14
3.3 Примеры для самостоятельной работы 17
3.4 Домашнее задание 18
4 Дифференциалы первого и высших порядков 19
4.1 Теоретическая часть 19
4.2 Образцы решения примеров 20
4.3 Примеры для самостоятельной работы 21
4.4 Домашнее задание 22
5 Теоремы о среднем. Правила Лопиталя 23
5.1 Теоретическая часть 23
5.2 Образцы решения примеров 24
5.3 Примеры для самостоятельной работы 26
5.4 Домашнее задание 27
6 Возрастание и убывание функции 28
6.1 Теоретическая часть 28
6.2 Образцы решения примеров 29
6.3 Примеры для самостоятельной работы 31
6.4 Домашнее задание 32
7 Выпуклость и вогнутость кривой. Асимптоты кривой 33
7.1 Теоретическая часть 33
7.2 Образцы решения примеров 34
7.3 Примеры для самостоятельной работы 36
7.4 Домашнее задание 37
8 Полное исследование функций 38
8.1 Теоретическая часть 38
8.2 Образцы решения примеров 38
8.3 Примеры для самостоятельной работы 40
8.4 Домашнее задание 40
Список литературы 41

1 Производная функции. Правила и формулы дифференцирования

1.1 Теоретическая часть

Приращением функции $y = f(x)$ называется разность $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, где Δx – приращение аргумента x.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если x изменяется, то предел тоже будет изменяться, следовательно, производная данной функции есть некоторая функция. Функция, имеющая конечную производную, называется ***дифференцируемой***. Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

***Геометрический смысл производной*:** производная функции $y = f(x)$ для каждого значения x равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной в точке $M(x; y)$ к графику функции $y = f(x)$.

Из рисунка 1.1 видно, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\beta$.

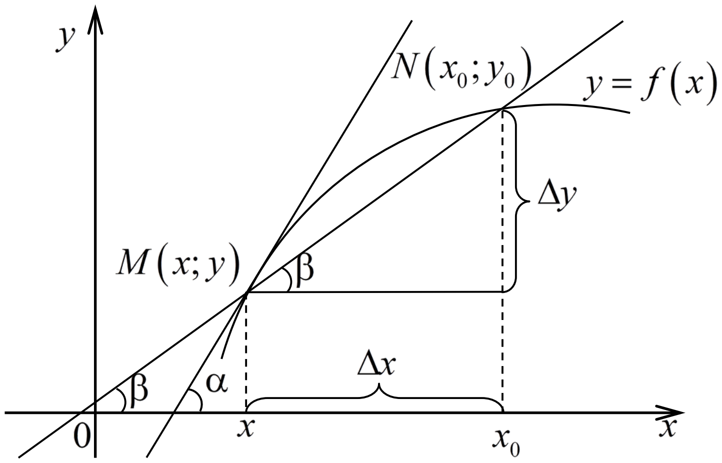

Рисунок 1.1

***Механический смысл производной*:** для функции $S = f(t)$, изменяющейся со временем t, производная S' есть скорость изменения функции в данный момент времени t_0, т. е. $f'(t_0) = v(t_0)$.

Если c – постоянное число, $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

3) $(cu)' = c \cdot u'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, (v \neq 0)$;

5) $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c}{v^2} \cdot v', (v \neq 0)$;

6) $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{1}{c} \cdot u'$.

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = g(y)$ и $\dfrac{dg}{dy} = g'(y) \neq 0$, то

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

На основании определения и правил дифференцирования составлена таблица производных основных элементарных функций (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Производные основных элементарных функций

Производные элементарных функций	Производные сложных функций
$(c)' = 0,\ c = \text{const}$	$(c)' = 0,\ c = \text{const}$
$(x)' = 1$	$(u)' = u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\left(u^\alpha\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u',\ \alpha \in \mathbb{R}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u',\ a > 0,\ a \neq 1$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

Окончание таблицы 1.1

Производные элементарных функций	Производные сложных функций
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u',\ a > 0,\ a \neq 1$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\operatorname{ctg} u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1 + u^2} \cdot u'$
$\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$	$\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\dfrac{1}{1 + u^2} \cdot u'$
$\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x$	$\left(\operatorname{sh} u\right)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
$\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x$	$\left(\operatorname{ch} u\right)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
$\left(\operatorname{th} x\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\left(\operatorname{th} u\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$
$\left(\operatorname{cth} x\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\left(\operatorname{cth} u\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$

1.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти производную функции $y = \dfrac{2x}{3x+1}$, воспользовавшись определением производной.

Решение

Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда соответствующее приращение Δy функции будет иметь вид

$$\Delta y = \frac{2\left(x + \Delta x\right)}{3\left(x + \Delta x\right) + 1} - \frac{2x}{3x+1} = \frac{6x^2 + 6x\Delta x + 2x + 2\Delta x - 6x^2 - 6x\Delta x - 2x}{\left(3\left(x + \Delta x\right) + 1\right)\left(3x+1\right)} =$$

$$=\frac{2\Delta x}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}.$$

Отсюда по определению производной получаем

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)\Delta x}=\frac{2}{(3x+1)^2}.$$

Пример 2 – Найти производную функции $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.

Решение

$$\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)'=\frac{\left(1+e^x\right)'\cdot\left(1-e^x\right)-\left(1+e^x\right)\cdot\left(1-e^x\right)'}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{e^x\cdot\left(1-e^x\right)+e^x\cdot\left(1+e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{e^x-e^{2x}+e^x+e^{2x}}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(1-e^x\right)^2}.$$

Пример 3 – Найти производную функции $y=\cos^2 x$.

Решение

$$\left(\cos^2 x\right)'=2\cos x\cdot(\cos x)'=2\cos x\cdot(-\sin x)=-\sin 2x.$$

Пример 4 – Найти производную функции $y=\sin(2x-1)^2\cdot 5^{\operatorname{tg}^3 x}$.

Решение

$$\left(\sin(2x-1)^2\cdot 5^{\operatorname{tg}^3 x}\right)'=\left(\sin(2x-1)^2\right)'\cdot 5^{\operatorname{tg}^3 x}+\sin(2x-1)^2\cdot\left(5^{\operatorname{tg}^3 x}\right)'=$$

$$=\cos(2x-1)^2\cdot\left((2x-1)^2\right)'\cdot 5^{\operatorname{tg}^3 x}+\sin(2x-1)^2\cdot 5^{\operatorname{tg}^3 x}\cdot\ln 5\cdot\left(\operatorname{tg}^3 x\right)'=$$

$$=5^{\operatorname{tg}^3 x}\cdot\left(\cos(2x-1)^2\cdot 2(2x-1)\cdot(2x-1)'+\sin(2x-1)^2\cdot\ln 5\cdot 3\operatorname{tg}^2 x\cdot(\operatorname{tg} x)'\right)=$$

$$=5^{\operatorname{tg}^3 x}\cdot\left(\cos(2x-1)^2\cdot 4(2x-1)+\sin(2x-1)^2\cdot\ln 5\cdot 3\operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right).$$

Пример 5 – Найти производную функции $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$.

Решение

$$\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}\cdot\frac{1}{x^2}=-\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

1.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти значения производных следующих функций в указанных точках:

1) $y=4x^5-2x^3+3$, $y'(1)$;
2) $y=2x^7+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}$, $y'(-1)$;
3) $y=\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^5}+\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$, $y'(1)$;
4) $y=x-\dfrac{2}{x}+\cos x$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$;
5) $y=\sqrt[4]{x^9}-\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{2}{x^2}$, $y'(1)$;
6) $y=2x\cdot\cos x$, $y'(\pi)$;
7) $y=3x^2\cdot\ln x$, $y'(1)$;
8) $y=(4x^2-8x+1)\cdot\sqrt{x}$, $y'(4)$;
9) $y=x^3\cdot\arccos x$, $y'(0)$;
10) $y=\dfrac{1+2x}{1-3x}$, $y'(-1)$;
11) $y=\dfrac{x^2-x+2}{x^3-9}$, $y'(2)$;
12) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt[4]{x}}$, $y'(\pi)$;
13) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$, $y'(\pi)$;
14) $y=\ln x+x\cdot e^x$, $y'(1)$;
15) $y=(x^3+2^x)\cdot\operatorname{tg}x$, $y'(0)$;
16) $y=(1+x^2)\cdot\operatorname{arctg}x$, $y'(0)$.

Ответы: 1) 14; 2) 1; 3) $-\dfrac{25}{6}$; 4) $\dfrac{8}{\pi^2}$; 5) $\dfrac{17}{4}$; 6) -2; 7) 3; 8) $\dfrac{225}{4}$; 9) 0; 10) $\dfrac{5}{16}$; 11) -51; 12) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$; 13) 2; 14) $2e+1$; 15) 1; 16) 1.

2 Найти значения производных сложных функций в указанных точках:

1) $y=\sin^3 x$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$;
2) $y=\sqrt{x^4+1}$, $y'(0)$;
3) $y=x\cdot\ln^2 x$, $y'(1)$;
4) $y=e^{-2\sin^2 5x}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$;
5) $y=\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $y'(2)$;
6) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}$, $y'(1)$;
7) $y=\ln^3\dfrac{1}{x}$, $y'(1)$;
8) $y=(x^9+1)\cdot\cos^2 3x$, $y'(0)$;
9) $y=\sqrt[4]{1+e^{4x}}+7^{\cos x}$, $y'(0)$;
10) $y=e^{-\sqrt{x^2+2x+2}}$, $y'(-1)$.

Ответы: 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) $\frac{8}{15}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) 0; 8) 0; 9) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$; 10) 0.

3 Расстояние, пройденное материальной точкой за время t, равно $S=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+2t+1$ (в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени $t_1=0$ с; $t_2=1$ с; $t_3=2$ с.

Ответ: $v_1=2$ м/с; $v_2=2$ м/с; $v_3=6$ м/с.

4 Составить уравнения касательной и нормали к кривым в указанных точках:

1) $y=x^2+4x-3$, $A(1;2)$;

2) $y=1-e^x$, точка пересечения с осью Oy;

3) $y=\ln x$, точка пересечения с осью Ox.

Ответы: 1) $y=6x-4$, $x=-6y+13$; 2) $y=-x$, $y=x$; 3) $y=x-1$, $y=-x+1$.

5 Определить, под каким углом парабола $y=x^2-x$ пересекает ось абсцисс.

Ответ: $\alpha_1=135°$; $\alpha_2=45°$.

6 Найти $f'(1)$, если $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2\sin\frac{1}{x-1} & \text{при } x\neq 1,\\ 0 & \text{при } x=1.\end{cases}$

Ответ: 0.

1.4 Домашнее задание

1 Найти значения производных следующих функций в указанных точках:

1) $y=\left(x^2+5x+4\right)\cdot\ln x$, $y'(1)$;

2) $y=\frac{x^5-1}{x^5+1}$, $y'(1)$;

3) $y=\sqrt{x^3-4}$, $y'(2)$;

4) $y=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$, $y'(0)$;

5) $y=\operatorname{ctg}^3\frac{x}{3}$, $y'(\pi)$;

6) $y=\ln\left(\sin^4 3x\right)$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

7) $y=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$, $y'(2)$;

8) $y=\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответы: 1) 10; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 3; 4) 1; 5) $-\frac{4}{9}$; 6) 0; 7) $-\frac{1}{5}$; 8) -1.

2 Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3+2x-2$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Ответ: $y=5x-4$, $x=-5y+6$.

2 Производные неявно и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование

2.1 Теоретическая часть

Если функция $y(x)$ задана соотношением $F(x,y)=0$, где $F(x,y)$ – выражение, содержащее x и y, то y называется ***неявной функцией*** от x.

Производная от такой функции может быть определена следующим образом: находим производную от левой части равенства $F(x,y)=0$, рассматривая при этом y как функцию от x, и приравниваем её к нулю. Далее решаем полученное уравнение относительно y' и имеем производную $y'=f(x,y)$.

Пусть функция $y(x)$ задана при помощи параметрических соотношений $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ причем $x(t)$ и $y(t)$ – дифференцируемые функции и $x'(t)\neq 0$.

Производная от y по x находится по формуле

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называется ***логарифмическим дифференцированием***. Этот метод позволяет легко найти производную от сложной функции вида $y=u^v$, где u и v – функции аргумента x. Прологарифмируем обе части исходного равенства:

$$\ln y=v\cdot\ln u.$$

Дифференцируя последнее соотношение, имеем

$$\frac{1}{y}\cdot y'=v\cdot\frac{u'}{u}+v'\cdot\ln u,$$

$$y'=u^v\cdot\left(v\cdot\frac{u'}{u}+v'\cdot\ln u\right) \text{ или } y'=v\cdot u^{v-1}\cdot u'+u^v\ln u\cdot v'.$$

2.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Вычислить значение производной функции, заданной неявно уравнением $xy^2=4$, в точке $M(1;2)$.

Решение

Дифференцируем обе части функции:

$$y^2 + 2xy \cdot y' = 0,$$

$$y' = -\frac{y}{2x}.$$

Подставляя $x = 1$ и $y = 2$, получим $y' = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$.

Пример 2 – Найти производную функции $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Решение

Дифференцируем исходные соотношения по t:

$$x'_t = -\sin t, \qquad y'_t = \cos t.$$

Отсюда

$$y'_x = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Пример 3 – Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение

Логарифмируя данную функцию, получим

$$\ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin 2x.$$

Дифференцируем обе части равенства по x:

$$(\ln y)' = (\operatorname{tg} x)' \cdot \ln \sin 2x + \operatorname{tg} x \cdot (\ln \sin 2x)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln \sin 2x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2,$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{\ln \sin 2x}{\cos^2 x} + 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x \right).$$

Таким образом,

$$y' = (\sin 2x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{\ln \sin 2x}{\cos^2 x} + 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x \right).$$

2.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти y' от неявно заданных функций:

1) $e^{y}-e^{-x}+xy=0$;

2) $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

3) $e^{xy}-x^{2}+y^{3}=0$;

4) $e^{x}\sin y-e^{-y}\cos x=0$.

Ответы: 1) $y'=-\dfrac{e^{-x}+y}{x+e^{y}}$; 2) $y'=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{1-x^{2}-y^{2}}{1+x^{2}+y^{2}}$; 3) $y'=\dfrac{2x-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^{2}}$;

4) $y'=-\dfrac{e^{x}\sin y+e^{-y}\sin x}{e^{x}\cos y+e^{-y}\cos x}$.

2 Найти y'_x от следующих функций:

1) $\begin{cases} x=t^{3}+t, \\ y=t^{2}+t+1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=e^{-t}\sin t, \\ y=e^{t}\cos t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^{2}\right), \\ y=t-\operatorname{arctg} t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=-\ln\left(1-t^{2}\right). \end{cases}$

Ответы: 1) $\begin{cases} y'_x=\dfrac{2t+1}{3t^{2}+1}, \\ x=t^{3}+t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'_x=e^{2t}, \\ x=e^{-t}\sin t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y'_x=\dfrac{t}{2}, \\ x=\ln\left(1+t^{2}\right); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y'_x=\dfrac{2t}{\sqrt{1-t^{2}}}, \\ x=\arcsin t. \end{cases}$

3 Найти производные следующих функций:

1) $y=x^{2x}$;

2) $y=x^{\cos x}$;

3) $y=(\sin x)^{\ln x}$;

4) $y=(x+1)^{\frac{2}{x}}$;

5) $y=\dfrac{(x-2)^{3}\cdot(x-1)^{4}}{(x+5)^{2}}$;

6) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x\left(x^{2}+1\right)}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}}$.

Ответы: 1) $y'=2x^{2x}\cdot(\ln x+1)$; 2) $y'=x^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln x+\dfrac{\cos x}{x}\right)$;

3) $y'=(\sin x)^{\ln x}\cdot\left(\ln x\cdot\operatorname{ctg} x+\dfrac{\ln\sin x}{x}\right)$; 4) $y'=2(x+1)^{\frac{2}{x}}\cdot\left(\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(x+1)}{x^{2}}\right)$;

5) $y'=\dfrac{(x-2)^{2}\cdot(x-1)^{3}\cdot\left(5x^{2}+30x-59\right)}{(x+5)^{3}}$; 6) $y'=\dfrac{x^{4}+6x^{2}+1}{3x\left(1-x^{4}\right)}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x\left(x^{2}+1\right)}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}}$.

2.4 Домашнее задание

1 Вычислить значение производной функции, заданной неявно уравнением $x^2+y^2-xy+x=1$, в точке $M(1;1)$.

Ответ: -2.

2 Найти y'_x функций:

1) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^2\cos t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\cos^2 t. \end{cases}$

Ответы: 1) $\begin{cases} y'_x=2t^2\cos t-t^3\sin t, \\ x=\ln t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'_x=-1, \\ x=\sin^2 t. \end{cases}$

3 Найти производные следующих функций:

1) $y=\left(\cos 3x\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$; 3) $y=\left(\arccos 5x\right)^{\ln x}$;

2) $y=\left(\ln\left(x+3\right)\right)^{\sin\frac{1}{x}}$; 4) $y=\dfrac{\left(1-x^2\right)\cdot\cos^6 x}{\sqrt[7]{x^5}}$.

Ответы: 1) $y'=\left(\cos 3x\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln\cos 3x}{2\sqrt{x}\cdot\left(1+x\right)}-3\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)$;

2) $y'=\left(\ln\left(x+3\right)\right)^{\sin\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot\ln\left(\ln\left(x+3\right)\right)+\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\left(x+3\right)\cdot\ln\left(x+3\right)}\right)$;

3) $y'=\left(\arccos 5x\right)^{\ln x}\left(\dfrac{\ln\arccos 5x}{x}-\dfrac{5\ln x}{\sqrt{1-25x^2}\cdot\arccos 5x}\right)$;

4) $y'=\dfrac{\left(x^2-1\right)\cdot\cos^6 x}{\sqrt[7]{x^5}}\cdot\left(\dfrac{2x}{1-x^2}+6\operatorname{tg}x+\dfrac{5}{7x}\right)$.

3 Производные высших порядков

3.1 Теоретическая часть

Производной второго порядка, или ***второй производной***, функции $y=f\left(x\right)$ называется производная от её первой производной $y'=f'\left(x\right)$. Она обозначается символами

$$y''=\left(y'\right)',\text{ или } f''\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]',\text{ или } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}.$$

Механический смысл второй производной: если $S = S(t)$ – закон прямолинейного движения материальной точки, то $S' = \frac{dS}{dt}$ – скорость, а $S'' = \frac{d^2S}{dt^2}$ – ускорение этой точки.

Производной n-го порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка данной функции. Её обозначают следующими символами:

$$y^{(n)},\text{ или } f^{(n)}(x),\text{ или } \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Таким образом, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}$, причем функция $y^{(n-1)}$ должна быть дифференцируемой.

Для производной n-го порядка произведения двух функций справедлива ***формула Лейбница***

$$(u\cdot v)^{(n)} = (u)^{(n)}\cdot v + n\cdot(u)^{(n-1)}\cdot v' + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot(u)^{(n-2)}\cdot v'' + \ldots + n\cdot u'\cdot v^{(n-1)} + u\cdot v^{(n)}.$$

Пусть функция $y(x)$ задается неявно соотношением $F(x,y)=0$. Для определения второй производной от неявной функции вначале находят её первую производную. Далее дифференцируют равенство $y' = f(x,y)$, рассматривая y как функцию от x. Затем в правой части заменяют y' её выражением из равенства $y' = f(x,y)$.

Пусть функция $y(x)$ задана при помощи параметрических соотношений $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ причем $x(t)$ и $y(t)$ – дифференцируемые функции и $x'(t) \neq 0$. Вторую производную от y по x находят по формуле

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично находят производные более высоких порядков.

3.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти производную второго порядка функции $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Решение

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$y''=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\left(\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+1\right)'=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$$

Пример 2 – Найти производную n-го порядка функции $y=\sin x$.

Решение

$$y'=\left(\sin x\right)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

…

$$y^{(n)}=\cos\left(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 3 – Найти производную десятого порядка функции $y=e^x\cdot\left(x^3-2\right)$.

Решение

Применяя формулу Лейбница, получим

$$y^{(10)}=\left[e^x\cdot\left(x^3-2\right)\right]^{(10)}=\left(e^x\right)^{(10)}\cdot\left(x^3-2\right)+10\cdot\left(e^x\right)^{(9)}\cdot\left(x^3-2\right)'+$$

$$+\frac{10\cdot 9}{2}\cdot\left(e^x\right)^{(8)}\cdot\left(x^3-2\right)''+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{2}\left(e^x\right)^{(7)}\left(x^3-2\right)'''.$$

Все последующие слагаемые равны нулю, т. к. все высшие производные от функции x^3-2, начиная с четвертой, равны нулю. Таким образом,

$$y^{(10)}=e^x\cdot\left(x^3-2\right)+30\cdot e^x\cdot x^2+45\cdot e^x\cdot 6x+120\cdot 6\cdot e^x=$$

$$=e^x\cdot\left(x^3+30\cdot x^2+270x+718\right).$$

Пример 4 – Задана функция $\operatorname{arctg} y-y+x=0$. Найти y''.

Решение

Дифференцируем заданное соотношение и находим y':

$$\frac{y'}{1+y^2}-y'+1=0,$$

$$y'-y'-y^2y'+1+y^2=0,$$

$$y'=\frac{1+y^2}{y^2}=\frac{1}{y^2}+1.$$

Отсюда

$$y''=-2y^{-3}\cdot y'=-\frac{2}{y^3}\cdot y'=-\frac{2}{y^3}\cdot\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)=-\frac{2\left(1+y^2\right)}{y^5}.$$

Пример 5 – Найти производную второго порядка функции $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos t.\end{cases}$

Решение

Дифференцируем исходные соотношения:

$$x_t'=\cos t,\qquad y_t'=-\sin t.$$

Отсюда

$$y_x'=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\operatorname{tg} t,\qquad \left(y_x'\right)_t'=-\frac{1}{\cos^2 t}.$$

Таким образом,

$$y_{xx}''=\frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{\cos t}=-\frac{1}{\cos^3 t}.$$

3.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Для данных функций найти производные второго порядка:

1) $y=\left(1+4x^2\right)\cdot\operatorname{arctg}2x$; 2) $y=\left(x^2+1\right)\cdot\ln\left(1+x^2\right)$.

Ответы: 1) $y''=8\operatorname{arctg}2x+\dfrac{16x}{1+4x^2}$; 2) $y''=\dfrac{4x^2}{1+x^2}+2\ln\left(1+x^2\right)+2$.

2 Для данной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''\left(x_0\right)$:

1) $y=\sin^2 x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}$; 5) $y=\left(2x+1\right)^5,\quad x_0=1$;

2) $y=\operatorname{arctg}x,\quad x_0=1$; 6) $y=x\cdot\sin x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}$;

3) $y=\ln\left(x^2+2\right),\quad x_0=0$; 7) $y=x^4\cdot\ln x,\quad x_0=1$;

4) $y=e^x\cdot\cos x,\quad x_0=0$; 8) $y=2^{x^2},\quad x_0=1$.

Ответы: 1) 0; 2) 0,5; 3) 0; 4) –2; 5) 4320; 6) 1; 7) 26; 8) $8\ln 2+16\ln^2 2+16\ln^3 2$.

3 Дано уравнение движения точки по оси Ox $x=100+5t-0{,}001t^3$. Найти скорость v и ускорение a этой точки в моменты времени $t_1=0$ с; $t_2=1$ с; $t_3=10$ с.

Ответ: $v_1=5$; $v_2=4{,}997$; $v_3=4{,}7$; $a_1=0$; $a_2=0{,}006$; $a_3=0{,}06$.

4 Найти производные третьего порядка от функций:

1) $r=a\cdot\left(\varphi-\sin\varphi\right)$; 3) $r=a\cdot\left(1-\cos\varphi\right)$;

2) $s=a\cdot\sin 4t$; 4) $s=a\cdot\cos 3t$.

Ответы: 1) $r'''=a\cdot\cos\varphi$; 2) $s'''=-64a\cdot\cos 4t$; 3) $r'''=-a\cdot\sin\varphi$; 4) $s'''=27a\cdot\sin 3t$.

5 Записать формулу для производной n-го порядка:

1) $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x}$; 3) $y=\sin\alpha x$;

2) $y=x^\alpha$; 4) $y=\cos\beta x$.

Ответы: 1) $y^{(n)}=\left(-1\right)^n\cdot 3\cdot\dfrac{n!}{x^{n+1}}$; 2) $y^{(n)}=\alpha\left(\alpha-1\right)...\left(\alpha-n+1\right)x^{\alpha-n}$; 3) $y^{(n)}=\alpha^n\sin\left(\alpha x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$; 4) $y^{(n)}=\beta^n\cos\left(\beta x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$.

6 Найти y'' от неявно заданных функций:

1) $x+y+\operatorname{arcctg}y=0$; 2) $\operatorname{arctg}\left(x+y\right)=x$;

3) $\ln y - \frac{x}{y} = 0$; 4) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 0$.

Ответы: 1) $y'' = -2\left(y^{-3} + y^{-5}\right)$; 2) $y'' = 2(x+y)\left(1+(x+y)^2\right)$;

3) $y'' = -\frac{y^2}{(x+y)^3}$; 4) $y'' = \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(1 + e^{\frac{y}{x}}\right)$.

7 Найти y''_{xx} от следующих функций:

1) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \ln\cos t, \\ y = \ln\sin t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$

Ответы: 1) $\begin{cases} y''_{xx} = 4t^2, \\ x = \ln t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y''_{xx} = -\frac{2\cos^2 t}{\sin^4 t}, \\ x = \ln\cos t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y''_{xx} = -\operatorname{ctg}^3 t, \\ x = \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$

3.4 Домашнее задание

1 Найти производные второго порядка от функций:

1) $y = -\frac{1}{9} x \cdot \sin 3x - \frac{2}{27}\cos 3x$; 4) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;

2) $y = \left(x^4+1\right) \cdot \ln\left(1+x^4\right)$; 5) $y = \sqrt{x^2+1}$;

3) $y = e^{-3x} \cdot (\cos 2x + \sin 2x)$; 6) $y = \sqrt{1-4x^2} \cdot \arcsin 2x$.

Ответы: 1) $y'' = x \cdot \sin 3x$; 2) $y'' = 12x^2 \cdot \ln\left(1+x^4\right) + 12x^2 + \frac{16x^6}{1+x^4}$;

3) $y'' = e^{-3x} \cdot (-7\cos 2x + 17\sin 2x)$; 4) $y'' = \frac{12x^2+4}{\left(x^2-1\right)^3}$; 5) $y'' = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$;

6) $y'' = -\frac{8x}{1-4x^2} - \frac{4\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{16x^2 \cdot \arcsin 2x}{\sqrt{\left(1-4x^2\right)^3}}$.

2 Найти третью производную функции $y = x^2 \cdot \cos 2x$.

Ответ: $y''' = -24x \cdot \cos 2x + \left(8x^2 - 12\right) \cdot \sin 2x$.

3 Найти производную n-го порядка функции $y = \frac{1+x}{1-x}$.

Ответ: $y^{(n)} = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$.

4 Вычислить значение производной функции, заданной неявно уравнением $x^2+2y^2-xy+x+y=4$, в точке $M(1;-1)$.

Ответ: 1.

5 Найти y''_{xx} функции $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=(2t+1)\cdot\cos t. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} y''_{xx}=\left(2t-t^2-2t^3\right)\cdot\cos t-\left(t+6t^2\right)\cdot\sin t, \\ x=\ln t. \end{cases}$

4 Дифференциалы первого и высших порядков

4.1 Теоретическая часть

Дифференциалом первого порядка функции $y=f(x)$ называется главная часть её приращения, линейно зависящая от приращения $\Delta x=dx$ независимой переменной x. Дифференциал dy функции равен произведению её производной и дифференциала независимой переменной:

$$dy=y'dx=f'(x)dx.$$

Из формулы дифференциала следует равенство $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала**:** если MN – дуга графика функции $y=f(x)$, MD – касательная к нему в точке $M(x,y)$ и $AB=\Delta x=dx$, то $DC=dy$, а $NC=\Delta y$ (рисунок 4.1).

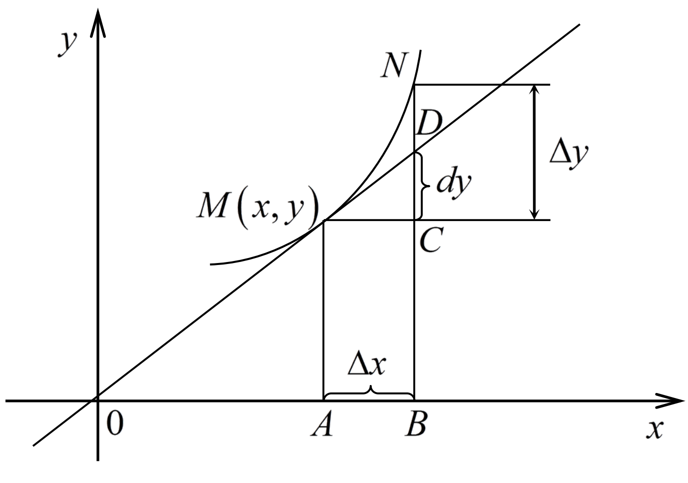

Рисунок 4.1

Дифференциал функции dy отличается от её приращения Δy на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с Δx.

Непосредственно из определения дифференциала и правил нахождения производных имеем *свойства дифференциала*:

1) $dC = 0\left(C = \text{const}\right)$;

2) $dx = \Delta x$, если x – независимая переменная;

3) $d\left(u \pm v\right) = du \pm dv$;

4) $d\left(u \cdot v\right) = vdu + udv$;

5) $d\left(C \cdot u\right) = C \cdot du$;

6) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$;

7) $df\left(u\right) = f_u'\left(u\right) \cdot u'dx = f'\left(u\right)du$.

Дифференциалом n-го порядка функции $y = f\left(x\right)$ называется дифференциал от дифференциала $\left(n-1\right)$-го порядка этой функции, т. е.

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right).$$

Если дана функция $y = f\left(x\right)$, где x – независимая переменная, то

$$d^2 y = y'' dx^2, \quad d^3 y = y''' dx^3, \quad \ldots, \quad d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

Если $y = f\left(u\right)$, где $u = \varphi\left(x\right)$, то $d^2 y = y''\left(dy\right)^2 + y' \cdot d^2 u$, где дифференцирование функции y выполняется по переменной u.

Так как $\Delta y \approx dy$, или $f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right) \approx f'\left(x\right)dx$, то $f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right) \approx f'\left(x\right)\Delta x$, т. е.

$$f\left(x + \Delta x\right) \approx f\left(x\right) + f'\left(x\right)\Delta x.$$

Полученная формула часто применяется для приближённого вычисления значений функции при малом приращении Δx независимой переменной x.

4.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти дифференциал функции $y = \ln \operatorname{arctg}\left(\sin x\right)$.

Решение

Находим производную данной функции:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\sin x\right)} \cdot \frac{1}{1 + \sin^2 x} \cdot \cos x.$$

Тогда

$$dy = \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{arctg}(\sin x)\cdot\left(1+\sin^2 x\right)}.$$

Пример 2 – Найти дифференциал второго порядка функции $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

Решение

Имеем

$$y' = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$y'' = \frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Следовательно,

$$d^2 y = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx^2.$$

Пример 3 – Найти приближенное значение $\sqrt[3]{26{,}19}$.

Решение

В данном случае

$$f(x)=\sqrt[3]{x}, \qquad f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Полагая, что $x=27$, $\Delta x=-0{,}81$, получим

$$\sqrt[3]{26{,}19}=\sqrt[3]{27-0{,}81}\approx\sqrt[3]{27}-\frac{0{,}81}{3\cdot\sqrt[3]{27^2}}=3-\frac{0{,}81}{3\cdot 9}=2{,}97.$$

4.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти дифференциалы первого порядка функции:

1) $y=\operatorname{tg}^2 2x$;
2) $y=e^{\sin 4x}$;
3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2}$;
4) $y=\sqrt{x^3+6x^2}$;
5) $y=x\cdot\operatorname{tg}^3 x$;
6) $y=\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)$;
7) $y=\sqrt{\operatorname{arctg} x}+\left(\arcsin 2x\right)^2$;
8) $y=\left(x^2+1\right)\cdot\operatorname{arctg} x$.

Ответы: 1) $dy=\dfrac{4\sin 2x}{\cos^3 2x}dx$; 2) $dy=4\cos 4x\cdot e^{\sin 4x}dx$; 3) $dy=\dfrac{2}{x^3}dx$;
4) $dy=\dfrac{3x^2+12x}{2\sqrt{x^3+6x^2}}dx$; 5) $dy=\left(\operatorname{tg}^3 x+\dfrac{3x\cdot\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$; 6) $dy=\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx$;
7) $dy=\left(\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{\operatorname{arctg} x}}+\dfrac{4\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\right)dx$; 8) $dy=\left(2x\cdot\operatorname{arctg} x+1\right)dx$.

2 Найти d^2y и d^3y функции:

1) $y=\ln x^{10}$; 2) $y=e^{-3x}\cdot\cos 2x$.

Ответы: 1) $d^2y=-\dfrac{10}{x^2}dx^2$, $d^3y=\dfrac{20}{x^3}dx^3$;
2) $d^2y=e^{-3x}\cdot\left(5\cos 2x+12\sin 2x\right)dx^2$, $d^3y=e^{-3x}\cdot\left(9\cos 2x-46\sin 2x\right)dx^3$.

3 Дана функция $y=x^4+4x$. Найти Δy и dy, сравнить их между собой, если:

1) $x=1, \Delta x=1$; 2) $x=1, \Delta x=0{,}1$.

Ответы: 1) $\Delta y=19$, $dy=8$; 2) $\Delta y=0{,}8641$, $dy=0{,}8$.

4 Вычислить приближенно:

1) $\operatorname{arctg}1{,}05$; 4) $\sqrt[4]{16{,}64}$;
2) $e^{0{,}2}$; 5) $\sin 31^\circ$;
3) $\ln 1{,}01$; 6) $\operatorname{tg}44^\circ$.

Ответы: 1) 0,81; 2) 1,2; 3) 0,01; 4) 2,02; 5) 0,515; 6) 0,965.

5 Вычислить приближенное значение функции $y=\sqrt{x^2-7x+10}$ при $x=0{,}98$ с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 2,02.

4.4 Домашнее задание

1 Найти дифференциалы второго порядка функций:

1) $y=4x^5-7x^2+3$; 3) $y=4^{-x^2}$;
2) $y=\cos 2x$; 4) $y=x\cdot\sin x$.

Ответы: 1) $d^2y=\left(80x^3-14\right)dx^2$; 2) $d^2y=-4\cos 2x dx^2$;
3) $d^2y=-2\ln 4\cdot 4^{-x^2}\cdot\left(1-2x^2\ln 4\right)dx^2$; 4) $d^2y=\left(2\cos x-x\cdot\sin x\right)dx^2$.

2 Найти d^3y от функции $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

Ответ: $d^3y = \dfrac{11 - 6\ln x}{x^4} dx^3$.

3 Вычислить приближённо, используя понятие дифференциала:

1) $\sqrt[6]{67{,}84}$; 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{0{,}99}{1{,}01}}$.

Ответы: 1) 2,02; 2) 0,78.

5 Теоремы о среднем. Правила Лопиталя

5.1 Теоретическая часть

Теорема 1 (Ферма). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема внутри этого отрезка и достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке $c \in [a;b]$, то $f'(c) = 0$.

Теорема 2 (Ролля). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема внутри этого отрезка и $f(a) = f(b)$, то существует по крайней мере одна точка $x = c\ (a < c < b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема 3 (Лагранжа). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема внутри этого отрезка, то существует по крайней мере одна точка $x = c\ (a < c < b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Теорема 4 (Коши). Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы внутри него, причём $\varphi'(x) \neq 0$ при $a < x < b$, то найдется хотя бы одна точка $x = c\ (a < c < b)$ такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Правила Лопиталя раскрытия неопределённостей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши в некоторой окрестности точки $x = x_0$, стремятся к нулю (или $\pm\infty$) при $x \to x_0$ и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует также $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ и эти пределы равны, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Это правило справедливо и при $x \to \pm\infty$.

Если частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке $x = x_0$ вновь дает неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то можно перейти к отношению вторых производных и т. д.

Раскрытие неопределённостей вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

1 Для раскрытия неопределенности типа $0 \cdot \infty$ необходимо преобразовать произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, в частное

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \left(\text{вид } \frac{0}{0}\right) \quad \text{или} \quad \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} \left(\text{вид } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

2 В случае неопределенности $\infty - \infty$ предел $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - \varphi(x)\right)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, необходимо свести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ с помощью преобразования

$$f(x) - \varphi(x) = \left(\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}\right) : \frac{1}{f(x) \cdot \varphi(x)}.$$

3 Неопределенности 0^0, 1^∞, ∞^0 раскрываются при помощи преобразования функции

$$f(x)^{\varphi(x)} = e^{\ln f(x)^{\varphi(x)}} = e^{\varphi(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\varphi(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \cdot \ln f(x)}.$$

5.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot e^x - 5x}{4x^2 + 7x}$.

Решение

Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$, следовательно, можно применить правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^x-5x}{4x^2+7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin x\cdot e^x-5x\right)'}{\left(4x^2+7x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x-5}{8x+7}=-\frac{4}{7}.$$

Пример 2 – Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\operatorname{tg}x\right)'}{\left(\operatorname{tg}3x\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}:\frac{3}{\cos^2 3x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\cos^2 3x\right)'}{\left(3\cos^2 x\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x\cdot(-\sin 3x)\cdot 3}{3\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin 6x)'}{(\sin 2x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=\frac{6}{2}=3.$$

Пример 3 – Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение

При $x\to 0$ получаем неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведём дроби к общему знаменателю.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\sin x\right)'}{\left(x\cdot\sin x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\right)'}{\left(\sin x+x\cos x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2\cdot 1-0}=0.$$

Пример 4 – Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot \operatorname{tg} x$.

Решение

При $x\to\frac{\pi}{2}$ имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем функцию

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot \operatorname{tg} x=\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg} x}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg} x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'}{\left(\operatorname{ctg} x\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-1.$$

Пример 5 – Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)^x$.

Решение

Имеем неопределённость вида 0^0.

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)^x=\left(0^0\right)=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left(1-\cos x\right)^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln\left(1-\cos x\right)}=\left(0\cdot\infty\right)=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\cos x\right)}{\frac{1}{x}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\ln\left(1-\cos x\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\cos x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin x\right)'}{\left(\cos x-1\right)'}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x+x^2\cos x}{-\sin x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(2x\sin x+x^2\cos x\right)'}{\left(-\sin x\right)'}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x}{-\cos x}}=e^{\frac{0}{1}}=e^0=1.$$

5.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\ln x}$;

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x e^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$;

8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$.

Ответы: 1) $-\dfrac{2}{5}$; 2) $\dfrac{2}{3}$; 3) 3; 4) $\dfrac{1}{3}$; 5) ∞; 6) 0; 7) $\dfrac{\pi^2}{2}$; 8) 0.

2 Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\pi-2x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg}x$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\cdot\ln x\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

Ответы: 1) ∞; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) 0; 5) 0; 6) ∞.

3 Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;

6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2}{x}+1\right)^{x}$.

Ответы: 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 2; 5) $e^{-\frac{1}{3}}$; 6) e^2.

5.4 Домашнее задание

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\cdot\sin 7x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Ответы: 1) 2; 2) $\dfrac{7}{2}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) 0; 5) $\dfrac{2}{\pi}$; 6) e^{-1}; 7) 1; 8) e^{-2}.

6 Возрастание и убывание функции

6.1 Теоретическая часть

Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) ***на интервале*** (a,b), если для $x_1>x_2$, где $x_1,x_2\in(a,b)$, выполняется условие $f(x_1)>f(x_2)$ $\left(f(x_1)<f(x_2)\right)$.

Теорема 1 (достаточное условие возрастания и убывания функции). Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x)>0$ для всех $x\in(a,b)$, то $f(x)$ возрастает на (a,b); если $f'(x)<0$ для всех $x\in(a,b)$, то $f(x)$ убывает на (a,b).

Точка x_0 называется ***точкой минимума*** (***максимума***) функции $y=f(x)$, если существует такая окрестность $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ точки x_0, что для всех $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$ $\left(f(x)<f(x_0)\right)$. Число $f(x_0)$ при этом называется ***минимумом*** (***максимумом***) ***функции***.

Точки минимума и максимума функции называются ***точками экстремума***.

Теорема 2 (необходимое условие существования экстремума). Если функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует, называются ***критическими***. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Теорема 3 (достаточные условия существования экстремума).

1 Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ критической точки x_0, за исключением, может быть, самой этой точки. Если $f'(x)>0$ для $x\in(x_0-\delta,x_0)$ и $f'(x)<0$ для $x\in(x_0,x_0+\delta)$, то x_0 – точка максимума. Если же $f'(x)<0$ для $x\in(x_0-\delta,x_0)$ и $f'(x)>0$ для $x\in(x_0,x_0+\delta)$, то x_0 – точка минимума. Если $f'(x)$ при $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $x\neq x_0$ сохраняет знак, то точка x_0 не является точкой экстремума.

2 Пусть $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$. Тогда функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, если $f''(x_0)<0$, и минимум, если $f''(x_0)>0$.

3 Пусть $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Если $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, то в точке x_0 экстремума нет. Если же $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$, то в точке x_0 будет максимум, если $f^{(n)}(x_0)<0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0)>0$.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего ***наименьшего*** и ***наибольшего значений***. Для нахождения наименьшего (наибольшего) значения функции на отрезке необходимо вычислить значения функции на концах этого отрезка и в критических точках, принадлежащих ему, а затем из всех полученных значений выбрать наименьшее (наибольшее).

6.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+4$.

Решение

Находим производную функции

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x^2-x-2).$$

Находим критические точки, приравняв производную к нулю:

$$x^2-x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-1, x_2=2 \text{ – критические точки.}$$

Нанесём эти точки на координатную прямую. На каждом интервале определим знак производной и применим достаточное условие возрастания (убывания) функции (рисунок 6.1).

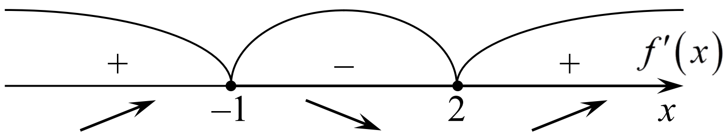

Рисунок 6.1

Итак, функция возрастает на промежутках $(-\infty;-1)$ и $(2;+\infty)$, а убывает в промежутке $(-1;2)$.

Пример 2 – Исследовать на экстремум функцию $f(x)=(x-2)\cdot\sqrt[3]{x^2}$.

Решение

Находим первую производную и критические точки.

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}};$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5x - 4 = 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{4}{5}$ – критические точки, т. к. в точке $x = 0$ функция непрерывна.

Нанесём эти точки на координатную прямую. На каждом интервале определим знак производной (рисунок 6.2).

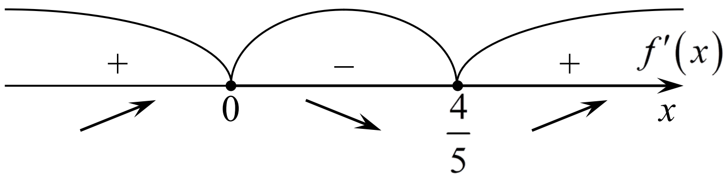

Рисунок 6.2

Применяя достаточное условие экстремума, имеем $x_{\min} = \dfrac{4}{5}$; $x_{\max} = 0$ – точки экстремума.

$$f_{\min} = f\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}, \quad f_{\max} = f(0) = 0 \text{ – экстремумы функции.}$$

Пример 3 – Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ на отрезке $\left[-\dfrac{5}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$.

Решение

Находим критические точки функции, входящие в данный отрезок:

$$f'(x) = 6x^2 - 6, \qquad f'(x) = 0, \qquad 6x^2 = 6;$$

$$x_1 = -1 \in \left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right], \qquad x_2 = 1 \in \left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

Теперь находим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$f(-1)=9, \qquad f(1)=1, \qquad f\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{45}{4}, \qquad f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{4}.$$

Таким образом, наибольшим значением функции на данном отрезке является $f(-1)=9$, а наименьшим – $f\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{45}{4}$.

6.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти промежутки возрастания и убывания функций:

1) $y=6-3x^2-x^3$;
2) $y=(x-2)^2(x+2)$;
3) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;
4) $y=e^{-x^2}$;
5) $y=x\cdot\ln x$;
6) $y=\arcsin(1+x)$;
7) $y=(x-3)\cdot\sqrt{x}$;
8) $y=\ln\sqrt{1+x^2}$.

Ответы: 1) $(-\infty;-2)$ и $(0;+\infty)$ – убывает, $(-2;0)$ – возрастает; 2) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$ и $(2;+\infty)$ – возрастает, $\left(-\frac{2}{3};2\right)$ – убывает; 3) $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ – убывает, $(-1;1)$ – возрастает; 4) $(-\infty;0)$ – возрастает, $(0;+\infty)$ – убывает; 5) $(0;e^{-1})$ – убывает, $(e^{-1};+\infty)$ – возрастает; 6) $(-2;0)$ – возрастает; 7) $(0;1)$ – убывает, $(1;+\infty)$ – возрастает; 8) $(-\infty;0)$ – убывает, $(0;+\infty)$ – возрастает.

2 Исследовать на экстремум функции:

1) $y=4x-x^4$;
2) $y=x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$;
3) $y=-x^2\cdot\sqrt{x^2+2}$;
4) $y=x-\ln(1+x)$.

Ответы: 1) $y_{\max}(1)=3$; 2) $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{4}$; 3) $y_{\max}(0)=0$; 4) $y_{\min}(0)=0$.

3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на указанном отрезке:

1) $y=x+3\sqrt[3]{x}$, $[-1;1]$;
2) $y=x\cdot\ln x$, $[0{,}1;1]$;
3) $y=\dfrac{x}{x^3+2}$, $[0;3]$;
4) $y=\dfrac{2x-1}{x^2+2}$, $[-2;0]$.

Ответы: 1) $y_{\text{наим.}}(-1)=-4$, $y_{\text{наиб.}}(1)=4$; 2) $y_{\text{наим.}}\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$, $y_{\text{наиб.}}(1)=0$; 3) $y_{\text{наим.}}(0)=0$, $y_{\text{наиб.}}(1)=\dfrac{1}{3}$; 4) $y_{\text{наим.}}(-1)=-1$, $y_{\text{наиб.}}(0)=-\dfrac{1}{2}$.

4 Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в эллипс $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Ответ: $5\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}$.

5 Найти наибольший объём конуса, образующая которого равна l.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\cdot\pi l^3$.

6 Найти наибольший объём цилиндра, у которого площадь полной поверхности равна S.

Ответ: $\dfrac{S}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

6.4 Домашнее задание

1 Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

1) $y=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3-x^2$;
2) $y=x^3-9x^2+15x$;
3) $y=\dfrac{x}{\ln x}$;
4) $y=(2x+1)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$;
5) $y=\dfrac{x^3}{1+x}$;
6) $y=\sqrt[4]{x^4-4x^3}$.

Ответы: 1) $y_{\min}(-2)=-\dfrac{8}{3}$, $y_{\min}(1)=-\dfrac{13}{12}$, $y_{\max}(0)=0$; возрастает на $(-2;0)$ и $(1;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-2)$ и $(0;1)$; 2) $y_{\max}(1)=7$, $y_{\min}(5)=-25$; возрастает на $(-\infty;1)$ и $(5;+\infty)$, убывает на $(1;5)$; 3) $y_{\min}(e)=e$; возрастает на $(e;+\infty)$, убывает на $(0;1)$ и $(1;e)$; 4) $y_{\max}\left(\dfrac{3}{2}\right)=4e^{-\frac{3}{4}}$; возрастает на $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$, убывает на $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$; 5) возрастает на $(-\infty;+\infty)$; 6) убывает на $(-\infty;0)$, возрастает на $(4;+\infty)$; экстремумов нет.

2 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на указанном отрезке:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,\ [-1;5]$; 2) $y = \dfrac{x-1}{x+1},\ [0;4]$.

Ответы: 1) $y_{\text{наим.}}(1) = -6$, $y_{\text{наиб.}}(5) = 266$; 2) $y_{\text{наим.}}(0) = -1$, $y_{\text{наиб.}}(4) = \dfrac{3}{5}$.

3 На какой высоте над центром круглого стола радиусом a следует поместить светодиодную лампу, чтобы освещённость края стола была наибольшей?

Ответ: $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

7 Выпуклость и вогнутость кривой. Асимптоты кривой

7.1 Теоретическая часть

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым*** **(*вогнутым*)** ***на интервале*** (a,b), если на этом интервале дуга кривой расположена ниже (выше) касательной, проведенной к графику функции в любой точке (a,b).

Теорема 1 (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если функция $y = f(x)$ на интервале (a,b) дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ для любого $x \in (a,b)$, то график функции на интервале (a,b) выпуклый; если же $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a,b)$, то график функции на интервале (a,b) вогнутый.

Точка $(x_0, f(x_0))$ графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его выпуклую (вогнутую) часть от вогнутой (выпуклой), называется ***точкой перегиба***.

Теорема 2 (необходимое условие существования точки перегиба графика функции). Если x_0 – точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Теорема 3 (достаточное условие существования точки перегиба). Если x_0 – критическая точка второго рода функции $y = f(x)$ и при $\delta > 0$ выполняются неравенства $f''(x_0 - \delta) < 0$, $f''(x_0 + \delta) > 0$ или неравенства $f''(x_0 - \delta) > 0$, $f''(x_0 + \delta) < 0$, то точка x_0 является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Прямая L называется ***асимптотой*** кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x,y)$ кривой до прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от $O(0;0)$ (т. е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности).

Для нахождения асимптот пользуются следующими утверждениями.

1 Если при $x = a$ кривая $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = a$ является её ***вертикальной асимптотой***. Отметим, что непрерывные функции не имеют вертикальных асимптот.

2 ***Наклонные асимптоты*** кривой $y = f(x)$, если они существуют, имеют уравнения $y = kx + b$, где k и b определяются формулами

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Если $k = 0$, то получаем ***горизонтальную асимптоту*** $y = b$.

Отметим, что если пределы в формулах для k и b не существуют или бесконечны, то наклонных асимптот нет.

7.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба кривой Гаусса $y = e^{-x^2}$.

Решение

Находим первую и вторую производные:

$$y' = -2x \cdot e^{-x^2}, \qquad y'' = \left(4x^2 - 2\right) \cdot e^{-x^2}.$$

Приравняв вторую производную к нулю, получим критические точки второго рода $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают числовую ось на три интервала: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$.

Так как $y'' > 0$ при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$, то на этих интервалах кривая вогнута. Поскольку $y'' < 0$ при $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, то на этом интервале кривая выпукла.

Точки $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ являются точками перегиба.

Пример 2 – Найти точку перегиба графика функции $y = x^3$.

Решение

Находим производные:

$$y' = 3x^2, \qquad y'' = 6x,$$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x = 0.$$

Таким образом, $x = 0$ – критическая точка второго рода. Так как $y'' < 0$ при $x < 0$, $y'' > 0$ при $x > 0$, то $x = 0$ есть точка перегиба.

Пример 3 – Найти точку перегиба графика функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение

Находим производные:

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}, \qquad y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}} \neq 0.$$

Вторая производная не существует при $x = 1$. Так как $y'' > 0$ при $x < 1$, $y'' < 0$ при $x > 1$, то точка $M(1;0)$ есть точка перегиба. Касательная в этой точке параллельна оси ординат.

Пример 4 – Найти асимптоты кривой $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Решение

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x} = \infty$, то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Найдём наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Таким образом, $y = x$ является наклонной асимптотой.

Пример 5 – Найти асимптоты кривой $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

Решение

График этой функции имеет две вертикальные асимптоты: $x = -1$ и $x = 1$, т. к.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{1-x^2}=\infty .$$

Найдём наклонные асимптоты в виде $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\left(1-x^2\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x-x^3}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x-x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{0}{-1}=0.$$

Получаем, что прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой.

7.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графиков функций:

1) $y=x^4-4x^3-48x^2+6x-9$;
2) $y=\frac{1}{6}x^3\left(x^2-5\right)$;
3) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$;
5) $y=\left(1+x^2\right)\cdot e^x$;
6) $y=x^2\cdot e^{\frac{2}{x^2}}$.

Ответы: 1) $(-2;-165)$, $(4;-753)$ – точки перегиба; выпукла на $(-2;4)$, вогнута на $(-\infty;-2)$ и $(4;+\infty)$; 2) $(0;0)$, $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}};\pm\frac{7\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}\right)$ – точки перегиба; выпукла на $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ и $\left(0;\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, вогнута на $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}};0\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{3}{2}};+\infty\right)$; 3) $(0;0)$ – точка перегиба; выпукла на $(0;+\infty)$, вогнута на $(-\infty;0)$; 4) $(0;0)$, $(2;0)$ – точки перегиба; выпукла на $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$, вогнута на $(0;2)$; 5) $\left(-3;\frac{10}{e^3}\right)$, $\left(-1;\frac{2}{e}\right)$ – точки перегиба; вогнута на $(-\infty;-3)$ и $(-1;+\infty)$, выпукла на $(-3;-1)$; 6) точек перегиба нет; выпукла на $(-\infty;0)$, вогнута на $(0;+\infty)$.

2 Найти асимптоты кривых:

1) $y=-e^{\frac{1}{x}}$;
2) $y=2x+\frac{2}{x-1}$;

3) $y=\dfrac{x^2+3x-2}{x+1}$;

4) $y=\dfrac{2}{x+3}$;

5) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$;

6) $y=\dfrac{x^2+3}{x^2-9}$.

Ответы: 1) $x=0$, $y=-1$; 2) $x=1$, $y=2x$; 3) $x=-1$, $y=x+2$; 4) $x=-3$; 5) $x=0$, $y=0$ $(x>0)$; 6) $x=\pm3$, $y=1$.

7.4 Домашнее задание

1 Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба:

1) $y=x^6-6x^5+\dfrac{15}{2}x^4+3x$;

2) $y=e^{-x^2}+2x$;

3) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$;

4) $y=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{x+2}}$.

Ответы: 1) $\left(1;\dfrac{11}{2}\right)$, $\left(3;-\dfrac{225}{2}\right)$ – точки перегиба; выпукла на $(1;3)$, вогнута на $(-\infty;1)$ и $(3;+\infty)$; 2) $\left(-\dfrac{\sqrt2}{2};\dfrac{1}{\sqrt e}-\sqrt2\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt2}{2};\dfrac{1}{\sqrt e}+\sqrt2\right)$ – точки перегиба; выпукла на $\left(-\dfrac{\sqrt2}{2};\dfrac{\sqrt2}{2}\right)$, вогнута на $\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt2}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{\sqrt2}{2};+\infty\right)$; 3) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt3};\dfrac12\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt3};\dfrac12\right)$ – точки перегиба; выпукла на $\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt3};+\infty\right)$, вогнута на $\left(-\dfrac{1}{\sqrt3};\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$; 4) $\left(e^{\frac43}-2;\dfrac43e^{-\frac23}\right)$ – точка перегиба; выпукла на $\left(-2;e^{\frac43}-2\right)$, вогнута на $\left(e^{\frac43}-2;+\infty\right)$.

2 Найти асимптоты кривых:

1) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2-4}$;

2) $y=5x+\dfrac{3}{x+1}$;

3) $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Ответы: 1) $x=\pm2$, $y=x$; 2) $x=-1$, $y=5x$; 3) $x=0$, $y=0$.

8 Полное исследование функций

8.1 Теоретическая часть

Схема исследования функций:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на непрерывность и определить характер точек разрыва;
3) исследовать функцию на четность и нечетность, периодичность;
4) найти точки пересечения графика функции с осями координат;
5) исследовать функцию на монотонность и экстремум;
6) найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба;
7) найти асимптоты графика функции;
8) по полученным данным построить график функции.

8.2 Образцы решения примеров

Пример – Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$ и построить её график.

Решение

1 $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

2 Функция имеет точку разрыва $x=2$ и непрерывна для всех x из области определения.

3 $y(-x)=\dfrac{(-x)^2-(-x)-1}{-x-2}=\dfrac{x^2+x-6}{-x-2}=-\dfrac{x^2+x-6}{x+2}\neq -y(x)\neq y(x)$.

Функция не является ни четной, ни нечетной. Функция не периодическая.

4 С осью Ox:

$$y=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2-x-6}{x-2}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x^2-x-6=0, \\ x-2\neq 0, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x_1=3,\; x_2=-2.$$

Точки $A(3;0)$ и $B(-2;0)$ – точки пересечения графика с осью Ox.

С осью Oy: $x=0 \Rightarrow y=3$. Точка $C(0;3)$ – точка пересечения графика с осью Oy.

5 Находим производную:

$$y'(x) = \left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 2}\right)' = \frac{(2x-1)(x-2) - (x^2 - x - 6)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 8}{(x-2)^2};$$

$$y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 2 \pm 2i.$$

Корни комплексно-сопряженные, следовательно, числитель в нуль не обращается ни при каких $x \in \mathbb{R}$. Так как $y'(x) > 0$, то функция возрастает на всей области определения и экстремумов не имеет.

6 Находим вторую производную:

$$y''(x) = \left(\frac{x^2 - 4x + 8}{(x-2)^2}\right)' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x + 8)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{8}{(x-2)^3}.$$

Критических точек второго рода нет, следовательно, нет точек перегиба. $y''(x) > 0$ при $x < 2$, значит, на интервале $(-\infty; 2)$ кривая вогнута. $y''(x) < 0$ при $x > 2$, значит, на интервале $(2; +\infty)$ кривая выпукла.

7 Вертикальной асимптотой является прямая $x = 2$, т. к.

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2+0} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = -\infty.$$

Найдём наклонную асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty}(y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 2} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - 6}{x - 2} = 1.$$

Прямая $y = x + 1$ – наклонная асимптота.

8 По полученным данным строим график функции (рисунок 8.1).

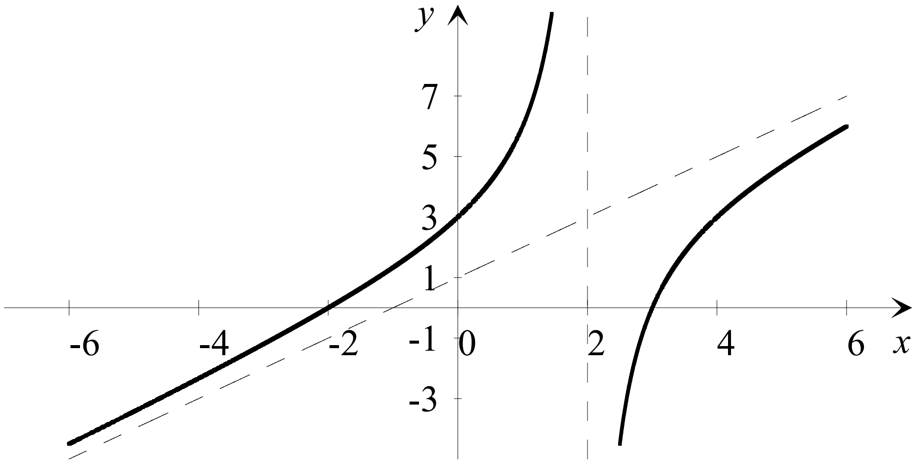

Рисунок 8.1

8.3 Примеры для самостоятельной работы

Провести полное исследование и построить графики функций:

1) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$;

2) $y=x+\dfrac{4}{x^2}$;

3) $y=\dfrac{3-2x}{(x-2)^2}$;

4) $y=(1-x)\cdot e^x$;

5) $y=x^3e^{-x}$;

6) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$;

7) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$;

8) $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

8.4 Домашнее задание

Провести полное исследование и построить графики функций:

1) $y=x^2+\dfrac{2}{x}$;

2) $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$;

3) $y=x\cdot\ln x$;

4) $y=12x-x^3$;

5) $y=e^{\frac{1}{x+2}}$;

6) $y=\ln\left(x^2+2x+2\right)$.

Список литературы

1 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2 т. / А. А. Гусак. – 7-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Т. 1. – 544 с.

2 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд. – Москва : Высшая школа, 1996. – Ч. 2. – 416 с.

3 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: в 3 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1. – 383 с.

4 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1985. – Т. 1. – 432 с.

5 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 16-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2019. – 608 с.

6 Руководство к решению задач по высшей математике: в 2 ч. / Под ред. Е. И. Гурского. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1. – 349 с.

7 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – Москва : Высшая школа, 1988. – 576 с.

8 Сборник задач по математике для втузов: в 2 ч. / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1986. – Ч. 1. – 464 с.

9 **Шипачёв, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачёв. – 7-е изд. – Москва : Высшая школа, 2005. – 479 с.