ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и всех направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Могилев 2018

УДК 51
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «30» января 2018 г., протокол № 5

Составители: ст. преподаватель А. М. Бутома;
ст. преподаватель Т. И. Червякова

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. Д. Камчицкая

Методические рекомендации содержат теоретические сведения по основным разделам математического анализа, образцы решения задач и упражнения для самостоятельной работы и под руководством преподавателя.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная вёрстка М. М. Дударева

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 105 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014 г.
Пр. Мира, 43, 212000, г. Могилев.

Содержание

1 Понятие функции. Основные элементарные функции

1.1 Теоретическая часть

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение.

Величина, сохраняющая постоянное значение в условиях данного процесса, называется параметром.

Переменной величиной называется величина, которая может принимать различные числовые значения. Если каждому значению x множества X $(x \in X)$ поставлено в соответствие единственное значение y множества Y $(y \in Y)$, то переменная величина y называется функцией переменной x и обозначается $y = f(x)$.

При этом x называется независимой переменной (или аргументом), y – зависимой переменной.

Множество X называется областью определения функции, множество Y – областью значений функции.

***Способы задания функций*:**

– аналитический способ, если функция задана формулой вида $y = f(x)$;

– табличный способ, если функция задана таблицей, содержащей значения аргумента x и соответствующие значения функции $y = f(x)$;

– графический способ, если функция изображена в виде графика;

– словесный способ, если функция описана правилом её составления.

К основным свойствам функции относятся чётность и нечетность, монотонность, ограниченность, периодичность.

1.2 Образцы решения примеров

***Пример 1* –** Найти $f(0)$, $f(-x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, если $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Решение

$$f(0) = \sqrt{1+0^2} = \sqrt{1} = 1;$$

$$f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2};$$

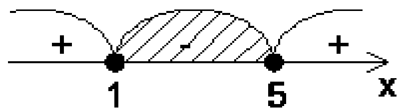
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}.$$

Пример 2 – Найти область определения функции $y = \sqrt[4]{6x - x^2 - 5}$.

Решение

$$6x - x^2 - 5 \ge 0; \quad (x-1)(x-5) \le 0.$$

Решаем неравенство методом интервалов.



Очевидно, что $x \in [1;5]$.

Пример 3 – Найти область определения функции $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$.

Решение

$$x^2 - 3x - 4 \ne 0; \qquad (x+1)(x-4) \ne 0; \qquad \begin{cases} x \ne -1, \\ x \ne 4. \end{cases}$$

Область определения функции $X = (-\infty;-1) \cup (-1;4) \cup (4;+\infty)$.

Пример 4 – Найти область значений функции $y = \sin x + \cos x$.

Решение

Преобразуем функцию:

$$y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Так как $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1$, то $\left|\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}$; $|y| \le \sqrt{2}$; $-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$.

Область значений $y \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Пример 5 – Выяснить четность (нечетность) функций:

1) $y = x - \operatorname{ctg}^3 x$; 2) $y = x \cdot \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$; 3) $y = (x-1)^2 \sin^2 x$.

Решение:

1) $f(-x) = -x - \operatorname{ctg}^3(-x) = -x + \operatorname{ctg}^3 x$, т. к. $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная;

2) $f(-x)=(-x)\dfrac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}=x\dfrac{2^{x}+1}{2^{x}-1}$, т. к. $f(-x)=f(x)$, то функция четная;

3) $f(-x)=(-x-1)^2\sin^2(-x)=(x+1)^2\sin^2 x$, т. к. $f(-x)\neq f(x)\neq -f(x)$, функция ни четная, ни нечетная.

1.3 Примеры для самостоятельной работы

1.3.1 Найти область определения функций:

1) $y=\log_3\sin x+\sqrt{4-x^2}$;

2) $y=\sqrt{(2x-5)\sqrt{9-x^2}}$;

3) $y=\sqrt{\log_{0,3}\dfrac{2x-1}{x+5}}$;

4) $y=\sqrt{\dfrac{3-x-2x^2}{\log_2 x+1}}$;

5) $y=\dfrac{2x^2-\lg(x+5)}{\sqrt{8-x^3}}$;

6) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

1.3.2 Найти область значений функций:

1) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$; 2) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; 3) $y=\sqrt{-x^2+x+2}$.

1.3.3 Определить четность (нечетность) функций:

1) $y=x^3\sin x$;

2) $y=x-x^3+5x^5$;

3) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;

4) $y=x^2+\sin x$;

5) $y=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$.

1.4 Домашнее задание

1.4.1 Найти $f\left(\dfrac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$, если $f(x)=\arccos(\lg x)$.

1.4.2 Найти область определения функций:

1) $y=\sqrt[3]{x^4+5}$;

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^4-16}}$;

3) $y=\arcsin\dfrac{x}{4}$;

4) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$;

5) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\sin x$.

1.4.3 Выяснить, какая функция четная и какая нечетная:

1) $f(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$;   2) $f(x)=2x^5\cos x$.

2 Предел числовой последовательности

2.1 Теоретическая часть

Если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставить в соответствие вполне определенное число a_n, то говорят, что задана числовая последовательность

$$\{a_n\}:\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots .$$

Числовая последовательность – это функция натурального аргумента:

$$a_n = f(n),\ n\in N .$$

Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}$ при n, стремящемся к бесконечности, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N=N(\varepsilon)$, что для всех $n>N$ имеет место неравенство $|a_n-A|<\varepsilon$.

Кратко, при помощи кванторов

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists N=N(\varepsilon)): n>N \Rightarrow |a_n-A|<\varepsilon .$$

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, в противном случае – расходящейся.

Геометрический смысл предела числовой последовательности состоит в следующем: для достаточно больших n члены последовательности как угодно мало отличаются от числа A (по абсолютной величине меньше, чем на число ε, каким бы малым оно не было) (рисунок 1).

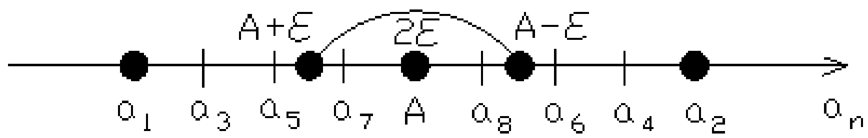


Рисунок 1

Неравенство $|a_n-A|<\varepsilon$ равносильно неравенству $A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$. Следовательно, все члены последовательности будут заключены в ε-окрестности точки a, какой бы узкой она ни была.

Вне ε-окрестности может быть лишь конечное число членов последовательности.

Теорема 1 (о существовании предела). Если последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает (убывает) и сверху (снизу) ограничена, то она имеет предел.

Теорема 2 (о числе *e*). Последовательность $\left\{e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ имеет предел.

Этот предел обозначается буквой *e*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \text{ где } e = 2{,}7182818284590... \approx 2{,}7.$$

Вычисление пределов последовательностей основано на приведении к «удобным» выражениям или при помощи теоремы 2.

2.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1.$

Решение

$$a_n = 1+\frac{(-1)^n}{n}.$$

Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда $|a_n - 1| < 0{,}1$ или $\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right| < \varepsilon$, т. е.

$\frac{1}{n} < \varepsilon$ выполняется при $n > 10$. Аналогично для $\varepsilon = 0{,}01$ $|a_n - 1| < \varepsilon$ при

$n > 100$. Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ выполняется при $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Итак,

$\exists\, N = \frac{1}{\varepsilon}$, что $\forall n > N$ $|a_n - 1| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1.$

Пример 2 – Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-2}{5n^2-n+7}.$

Решение

Вынесем в числителе и знаменателе за скобки старшую степень n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(5-\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}=\frac{2}{5},$$

т. к. при $n\to\infty$ $\frac{3}{n}\to 0$, $\frac{2}{n^2}\to 0$, $\frac{1}{n}\to 0$, $\frac{7}{n^2}\to 0$.

Пример 3 – Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12n^2-3n-2}{7n^3+6n^2-3}$.

Решение

Вынесем за скобки старшую степень n^3:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{12}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(7+\frac{6}{n}-\frac{3}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{12}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}}{7+\frac{6}{n}-\frac{3}{n^3}}=\frac{0}{7}=0.$$

Пример 4 – Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n-1}{n^2+2n+1}$.

Решение

Вынесем за скобки n^3:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(4+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}=+\infty.$$

Из этих примеров можно сделать вывод

$$\begin{array}{c}\text{предел}\\ \text{рациональ-}\\ \text{ной дроби} =\\ \text{при } n\to\infty\end{array}\left[\begin{array}{l}\textit{отношению старших коэффициентов, если}\\ \textit{степени числителя и знаменателя равны};\\ 0, \textit{ если степень числителя} < \textit{степени знаменателя};\\ \infty, \textit{ если степень числителя} > \textit{степени знаменателя.}\end{array}\right.$$

Пример 5 – Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2-n}\right)$.

Решение

Имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$.

Умножим и разделим на выражение, сопряженное данному, и используем формулу

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+3n-1\right)-\left(n^2-n\right)}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n^2-n}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\frac{4}{1+1}=2.$$

2.3 Примеры для самостоятельной работы

2.3.1 Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-1}{12n^2-7n-8}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3n}}{5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+7n+11}{2n^3+n-2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-4}{\sqrt[4]{n^4+5}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n\cdot n!-3(n-1)!}{(n+1)!-4n!}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{2-n-n^3}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n+2)!}{(n+3)n!+(n+1)!}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{10+n\sqrt{n}}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{12}{n+2}-\dfrac{1}{n^2-4}\right)$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^3+3n-1}}{\sqrt[3]{8n^3+4n-7}}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{1-n}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-3\cdot 2^n}{3^{n+1}-5^{n-1}}$.

2.3.2 Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+3}=2.$

Ответы:

1) $\dfrac{1}{6}$; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) 0; 4) 1; 5) 2; 6) 0; 7) ∞; 8) ∞; 9) 0; 10) ∞; 11) e^{-2}; 12) –5.

2.4 Домашнее задание

2.4.1 Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+3n}{n^2+5}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n}{3n^4-3n^2+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+5}{3n-1}\right)^{4n-3}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n+1}-n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-5n}{n^2+3n-1}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+(n-3)!}{2n^2(n-3)!+(n-2)!}$.

Ответы:

1) 0; 2) 0; 3) e^8; 4) –1; 5) ∞; 6) $\dfrac{1}{2}$.

2.4.2 Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3n^2}{2+6n^2}=-\dfrac{1}{2}.$

3 Предел функции в бесконечности и точке. Вычисление пределов

3.1 Теоретическая часть

Предел функции в бесконечности тесно связан с пределом числовой последовательности.

Число A называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$ найдется такое положительное число $S>0$, зависящее от ε, что для всех x, таких, что $|x|>\varepsilon$, верно неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

С помощью логических символов имеем

$$\left(A=\lim_{x\to\infty} f(x)\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\left(\exists\, s=s(\varepsilon)>0\right)\left(\forall x: |x|>s\right)\left(\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right).$$

Выясним геометрический смысл определения (рисунок 2).

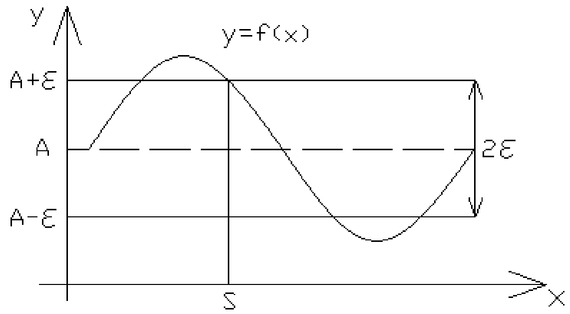


Рисунок 2

Для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $s>0$, что для $|x|>s$ соответствующие ординаты графика функции $y=f(x)$ будут заключены в полосе $A-\varepsilon<y<A+\varepsilon$, какой бы узкой она ни была.

Пусть функция $y=f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки.

Число A называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое положительное $\delta>0$, зависящее от ε, что для всех $x\neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$ выполняется условие $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Запишем это определение с помощью кванторов:

$$\left(A=\lim_{x\to x_0} f(x)\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\left(\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0\right)\left(\forall x\neq x_0: |x-x_0|<\delta\right)\left(\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right).$$

.

Рассмотрим геометрический смысл определения (рисунок 3).

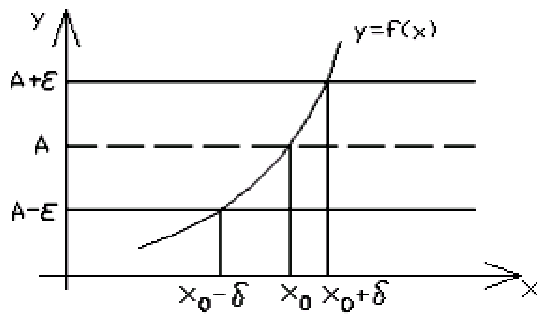


Рисунок 3

Для $\forall\varepsilon > 0$ найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности соответствующие ординаты графика $y = f(x)$ будут заключены в полосе $A-\varepsilon < y < A+\varepsilon$, какой бы узкой она ни была.

Если существуют пределы вида $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$, то они называются односторонними пределами в точке x_0 (предел слева и предел справа).

Для вычисления пределов функции применяют основные теоремы о пределах:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, где C – постоянная;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right) \neq 0$;

6) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

3.2 Образцы решения примеров

Пример 1 **–** Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3) = 5.$

Решение

Пусть $\varepsilon = 0{,}1$, тогда $\left|(2x+3)-5\right| < 0{,}1$; $\left|2x-2\right| < 0{,}1$; ; $\left|x-1\right| < 0{,}05$.

Пусть $\varepsilon = 0{,}01$, тогда $\left|x-1\right| < 0{,}005$.

Для любого $\varepsilon > 0$ $\left|x-1\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, т. е. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Итак, для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\,\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ такое, что если выполняется неравенство $\left|x-1\right| < \delta$, то верно и неравенство $\left|f\left(x\right)-5\right| < \varepsilon$.

Пример 2 – Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 3 – Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}$.

Решение

Для раскрытия неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=\lim_{x\to 2}\frac{2\left(x-2\right)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}=\frac{2}{4\left(2+2\right)}=\frac{1}{8}.$$

Пример 4 – Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{2x+1}$.

Решение

Пусть

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}{2x+1},$$

т. к. $\sqrt{x^2}=|x|$.

Если $x\to+\infty$, то $|x|=x$. Полагаем, что $x>0$, тогда

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-1\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1-1}{2+0}=0.$$

Если $x\to-\infty$, то $|x|=-x$. Полагаем, что $x<0$, тогда

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{-x\left(\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+1\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-1-1}{2+0}=-1.$$

Итак, $A=\begin{cases}0 & при\ x\to+\infty,\\ -1 & при\ x\to-\infty.\end{cases}$

Пример 5 – Найти $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$.

Решение

Имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Приведем выражение к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to1}\frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+x}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

3.3 Примеры для самостоятельной работы

Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-10x+24}{x^2-7x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+4x+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+8x^2+21x+18}$;

6) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+2}{x+10^{10}}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1000x+3x^2}{x^2-16}$;

11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-7x+6}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

14) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$;

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+6x-5x^2}{x^3+x^2+1}$;

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+9}}$;

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-1}{3x^2-1}\right)^x$;

20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-1}{3x^2-1}\right)^x$.

***Ответы*:**

1) –2; 2) 0,4; 3) 3,5; 4) 0,75; 5) 4; 6) 12; 7) –1; 8) $\dfrac{2}{9}$; 9) ∞; 10) 3; 11) 0,6; 12) 1; 13) 4; 14) $-\dfrac{1}{3}$; 15) 0,5; 16) 0; 17) ∞; 18) 1; 19) ∞; 20) 0.

3.4 Домашнее задание

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-9}-2x}{2-\sqrt[3]{x^3+5}}$;

6) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3}{2x^2-x}-x\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4}{\sqrt[4]{x^4+5}}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$;

11) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-5x+4}$;

12) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+5x+6}$;

13) $\lim\limits_{x\to64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{16x^4+1}}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^2+x}}{x+1}$;

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{2x^3+3x+1}$;

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2+7x}$;

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}$;

20) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$.

Ответы:

1) 0,8; 2) $\dfrac{5}{11}$; 3) $\dfrac{3}{4}$; 4) $\dfrac{2}{3}$; 5) –1; 6) 0,5; 7) 0,5; 8) 72; 9) 1; 10) ∞; 11) –1; 12) –6; 13) 3; 14) 3; 15) 0,5; 16) 0; 17) 0,5; 18) 0; 19) 0; 20) 2,5.

4 Замечательные пределы. Применение бесконечно малых величин к вычислению пределов

4.1 Теоретическая часть

Первым замечательным пределом называется $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Вторым замечательным пределом называется $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, где $e\approx2,7$. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой величиной (б. м. в.) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой величиной (б. б. в.) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Между бесконечно малыми величинами и бесконечно большими величинами существует следующая связь: если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$), то $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая величина; обратно, если функция $f(x)$ есть бесконечно большая величина при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$), то функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ есть бесконечно малая величина.

Сравниваем бесконечно малые величины.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малая величина при $x \to x_0$, тогда:

1) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$;

2) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми величинами одного и того же порядка;

3) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой величиной низшего порядка по сравнению с $\beta(x)$;

4) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми величинами и обозначаются $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Основные эквивалентности (при $x \to 0$):

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

2) $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

3) $1 - \cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$;

4) $\log_b\left(1 + \alpha(x)\right) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln b}$;

5) $b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln b$;

6) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

7) $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

8) $\left(1 + \alpha(x)\right)^n - 1 \sim n\,\alpha(x)$.

9) $\ln\left(1 + \alpha(x)\right) \sim \alpha(x)$;

10) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$.

4.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}=\frac{3}{5}.$$

Здесь применен первый замечательный предел.

Пример 2 – Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot \operatorname{tg} 2x}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\cdot \operatorname{tg} 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x\cdot\cos 2x}{2x\cdot\sin 2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x=2\cdot 1\cdot 1=2\,.$$

Пример 3 – Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x-5)\cdot\sin\dfrac{1}{x-5}\right)$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left((x-5)\cdot\sin\frac{1}{x-5}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\dfrac{1}{x-5}\right)}{\dfrac{1}{x-5}}=1.$$

Пример 4 – Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+5}\right)^{7x}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+5}\right)^{7x}=(1)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x+5}-1\right)^{7x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+5}\right)^{7x}=$$

$$=\left(\left(1+\frac{-4}{2x+5}\right)^{\frac{2x+5}{-4}}\right)^{\frac{-4\cdot 7x}{2x+5}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-28x}{2x+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-28x}{2x+5}}=e^{-14}.$$

Здесь применили второй замечательный предел.

Пример 5 – Доказать, что порядок функции $\frac{x^3}{3-x}$ выше, чем порядок функции x^2 при $x \to 0$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2(3-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3-x}=0\ ,$$

т. е. функция $\frac{x^3}{3-x}$ есть бесконечно малая величина более высокого порядка, чем x^2.

Пример 6 – С помощью замены эквивалентных бесконечно малых величин найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}$;   3) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln(\ln x)}{2x-2e}$;   5) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$;   4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 7x}{e^{-2x}-1}$;

Решение:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix}\ln(1+3x)\sim 3x\\ \sin 5x\sim 5x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5};$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\frac{x^2}{4}}=$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{x^2}=\left[\ln(1+(\cos x-1))\sim\cos x-1\right]=$$

$$=-4\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\right]=-4\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=-4\cdot\frac{1}{2}=-2;$$

3) $$\lim_{x\to e}\frac{\ln(\ln x)}{2x-2e}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to e}\frac{\ln(1+(\ln x-1))}{2(x-e)}=$$

$$=\left[\ln\left(1+(\ln x-1)\right)\to \ln x-1\right]=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{2(x-e)}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{2(x-e)}=$$

$$=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right)}{2(x-e)}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{x}{e}-1}{2(x-e)}=\lim_{x\to e}\frac{x-e}{2e(x-e)}=\frac{1}{2e};$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}7x}{e^{-2x}-1}=\begin{bmatrix}\operatorname{arctg}7x\sim 7x\\ e^{-2x}-1\sim -2x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{-2x}=-\frac{7}{2};$$

5) $$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 2x}{\sin 5x},$$

где $\sin 2x$ и $\sin 5x$ – бесконечно малые величины, но x – не бесконечно малая величина. Введём бесконечно малую величину $\alpha=\pi-x$, тогда $x=\pi-\alpha$.

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2(\pi-\alpha)}{\sin 5(\pi-\alpha)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(2\pi-2\alpha)}{\sin(5\pi-5\alpha)}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\sin 2\alpha}{\sin 5\alpha}=\begin{bmatrix}\sin 2\alpha\sim 2\alpha\\ \sin 5\alpha\sim 5\alpha\end{bmatrix}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-2\alpha}{5\alpha}=-\frac{2}{5}.$$

4.3 Примеры для самостоятельной работы

4.3.1 Найти пределы, используя первый замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{3}}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 7x}{\sin^2 9x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;

8) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\sin^2 7x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 7x}{\sin 5x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

12) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$;

13) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$;

14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 8x}{4x}$.

***Ответы*:**

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{49}{81}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $-\frac{1}{6}$; 6) 12; 7) $\frac{1}{2}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{32}{49}$; 10) $-\frac{4}{5}$; 11) $\frac{2}{\pi}$; 12) $\frac{9}{98}$; 13) $\frac{1}{8}$; 14) π; 15) $\frac{5}{2}$.

4.3.2 Найти пределы, используя второй замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{\frac{x+1}{2}}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{x^2-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-1}\right)^{3x^2-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{3}{x}}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$;

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}((x-5)\cdot(\ln(x-3)-\ln x))$;

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot(\ln(x+1)-\ln x))$.

***Ответы*:**

1) e; 2) e^4; 3) e^{15}; 4) $e^{\frac{18}{5}}$; 5) e^3; 6) e^2; 7) 1; 8) e^{-2}; 9) –3; 10) 1.

4.3.3 Найти пределы, применяя эквивалентные бесконечно малые величины:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2\sin^2 x+x\operatorname{tg}7x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 5x}{(x-x^3)^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x}-1}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-10^x}{3^x-7^x}$.

Ответы:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{8}{9}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 15; 6) $\frac{5}{12}$; 7) $\frac{1}{3\ln 2}$; 8) $\frac{\ln 4-\ln 10}{\ln 3-\ln 7}$.

4.3.4 Сравнить бесконечно малые величины $\alpha(x)=x^2\sin^2 x$ и $\beta(x)=x\mathrm{tg}x$ с бесконечно малой величиной $\gamma(x)=x$ при $x\to 0$.

4.4 Домашнее задание

4.4.1 Найти пределы, используя первый замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{16x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\mathrm{tg}^2 x}{x\sin x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\mathrm{tg}x}$;

6) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$;

7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x}$;

8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\mathrm{tg}^2 x\right)$;

10) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$;

12) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 2x}{x\sin 2x}$;

14) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$.

Ответы:

1) $\frac{3}{32}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 3; 5) 1; 6) 0; 7) $\frac{1}{4}$; 8) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 9) 0,5; 10) –0,5;

11) 8; 12) $\frac{1}{2}$; 13) 3; 14) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

4.4.2 Найти пределы, используя второй замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+3x}{3x}\right)^{x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+2}\right)^{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-2x+6}\right)^{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}(1+x+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}$;

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}((2x+1)(\ln(x+3)-\ln x))$;

9) $\lim\limits_{x\to2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$;

10) $\lim\limits_{x\to3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$;

11) $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

***Ответы*:**

1) e^3; 2) e^2; 3) $e^{\frac{2}{3}}$; 4) e^2; 5) e^6; 6) 1; 7) e; 8) 6; 9) e^6; 10) e^6; 11) e.

4.4.3 Найти пределы, применяя эквивалентные бесконечно малые величины:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{\arcsin 3x\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[7]{1+\sin x}-1+\operatorname{tg}x}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{e^{x-1}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-2x}-1}{\arcsin x}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{tgx}-3^{\sin x}}{\left(\operatorname{tg}\left(x/2\right)\right)^3}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{3x^3+1}-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x^2}-e^{2x}}{5x^2}$.

Ответы:

1) -1; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{8}{7}$; 5) $\frac{\ln 2}{\ln 3}$; 6) $\frac{1}{5}$; 7) –2; 8) $4\ln 3$; 9) ∞; 10) 0,6.

4.4.4 Сравнить бесконечно малые величины $\alpha(x) = 1 - \cos x$ и $\beta(x) = \frac{x^3}{3 - x}$ при $x \to 0$.

4.4.5 Сравнить бесконечно малые величины $\alpha(x) = e^{2x} - e^x$ и $\beta(x) = \sin^2 x$ при $x \to 0$.

4.4.5 Сравнить бесконечно малые величины $\alpha(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ и $\beta(x) = 1 - \sqrt{x}$ при $x \to 1$.

4.4.6 Найти значения параметра a, удовлетворяющие равенствам:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 ax}{2x^2} = 8$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{4x} = \frac{1}{2}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + ax)}{4x} = 2$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\left(e^x - 1\right)}{1 - \cos ax} = 2$.

Ответы:

1) ± 4; 2) 2; 3) 8; 4) 1.

5 Непрерывность и точки разрыва функций

5.1 Теоретическая часть

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

1) $f(x)$ определена в точке x_0 и её окрестности;

2) существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$;

3) эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке x_0.

Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, но в точке x_0 функция не определена, то точка x_0 называется устранимой точкой разрыва.

Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода.

Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или является бесконечным, то x_0 – точка разрыва 2-го рода.

Свойства функций, непрерывных в точке:

1) если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма $f(x)+g(x)$, произведение $f(x)\cdot g(x)$, частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x_0)\neq 0\right)$ также являются функциями, непрерывными в точке x_0;

2) если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u = g(x)$ непрерывна в точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0;

3) если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то обратная ей функция $x = g(y)$ непрерывна в точке y_0.

5.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Установить характер точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{1+x^3}{1+x}$.

Решение

Функция не определена в точке $x=-1$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0}\frac{1+x^3}{1+x} = \lim_{x\to -1-0}\frac{(1+x)\left(1-x+x^2\right)}{1+x} = \lim_{x\to -1-0}\left(1-x+x^2\right) = 3;$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0}\frac{1+x^3}{1+x} = \lim_{x\to -1+0}\frac{(1+x)\left(1-x+x^2\right)}{1+x} = \lim_{x\to -1+0}\left(1-x+x^2\right) = 3.$$

Так как $f(-1-0) = f(-1+0)$, но данная функция $f(x)$ в точке $x=-1$ не определена, то точка $x=-1$ есть точка устранимого разрыва.

Разрыв можно устранить, положив $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^3}{1+x}, & \text{если } x\neq -1,\\ 3, & \text{если } x=-1.\end{cases}$

Пример 2 – Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\le 3, \\ 2x+1, & \text{если } x>3. \end{cases}$

Решение

Данная функция определена на всей числовой оси, непрерывна для $x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$. Точкой разрыва может быть точка $x=3$. Найдём односторонние пределы:

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}x^2=9;$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}(2x+1)=7.$$

Точка $x=3$ – точка разрыва первого рода (конечного скачка) (рисунок 4).

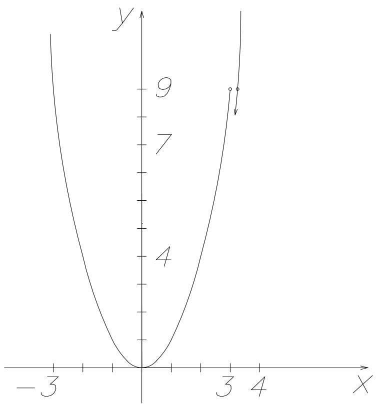


Рисунок 4

Пример 3 – Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$.

Решение

Функция определена и непрерывна везде, кроме точки $x=-1$. Найдем односторонние пределы:

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1-0}e^{\frac{1}{x+1}}=0, \quad \text{т. к. } \frac{1}{x+1}\to -\infty;$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1+0}e^{\frac{1}{x+1}}=+\infty, \quad \text{т. к. } \frac{1}{x+1}\to +\infty.$$

Следовательно, точка $x=-1$ – точка разрыва 2-го рода (бесконечного скачка).

Прямые $y=0$ и $y=1$ являются горизонтальными асимптотами. Построим схематично график функции (рисунок 5).

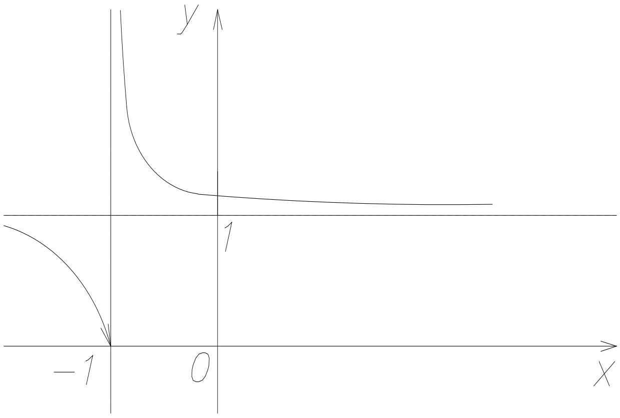


Рисунок 5

Пример 4 **–** Найти точки разрыва функции $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, определить их характер и построить график функции.

Решение

Функция не определена при $x=0$, т. е. $x=0$ – точка разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}\left(+\infty\right)=\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to 0-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}\left(-\infty\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

Точка $x=0$ – точка разрыва 1-го рода.

Для построения схематичного графика найдём:

$$\lim_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}\left(+0\right)=0;$$

$$\lim_{x\to -\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}\left(-0\right)=0.$$

Построим схематичный график (рисунок 6).

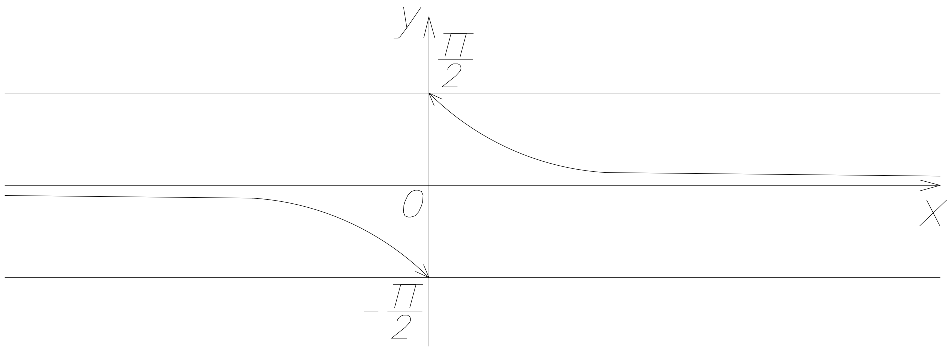


Рисунок 6

5.3 Примеры для самостоятельной работы

Определить точки разрыва функции, их характер и построить схематичный график функции:

1) $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если } x<-1; \\ x^2+1, & \text{если } -1\le x\le 1; \\ 3-x, & \text{если } x>1; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если } x\le 0; \\ x^2, & \text{если } 0<x\le 2; \\ x+1, & \text{если } x>2; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{если } x\le 0; \\ 1-x, & \text{если } 0<x\le 1; \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{если } x>1; \end{cases}$

4) $f(x)=\dfrac{4}{(x-3)^2}$;

5) $f(x)=\begin{cases} -3x, & \text{если } x\ge -1; \\ \dfrac{x}{x+4}, & \text{если } x<-1; \end{cases}$

6) $f(x)=2^{\frac{1}{8-x}}$;

7) $f(x)=4^{\frac{1}{x-3}}+1$;

8) $f(x)=\dfrac{x-4}{x+2}$;

9) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$;

10) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

5.4 Домашнее задание

Исследовать функции на непрерывность и построить схематично их графики:

1) $f\left(x\right)=\begin{cases} x^3, & если\ \ x<-1; \\ x-1, & если\ \ -1\le x\le 3; \\ -x+5, & если\ \ x>3; \end{cases}$ 3) $f\left(x\right)=\dfrac{x-5}{x+3}$;

2) $f\left(x\right)=\begin{cases} -1, & если\ \ x<0; \\ \cos x, & если\ \ 0\le x\le \pi; \\ \dfrac{1}{\pi-x}, & если\ \ x>\pi; \end{cases}$ 4) $f\left(x\right)=5^{\frac{1}{x-3}}+2$.

Тест по теме «Предел и непрерывность»

1 Выяснить, какие из перечисленных функций бесконечно малые при $x\to 0$:

а) $y=\dfrac{1}{x}$; в) $y=\dfrac{1}{\cos 3x}$; д) $y=\cos 2x$.

б) $y=\sin\dfrac{x}{3}$; г) $y=x^{10}$;

2 Выяснить, какие из перечисленных функций бесконечно большие при $x\to +\infty$:

а) $y=\sqrt[9]{x}$; в) $y=5^{-x}$; д) $y=\dfrac{1}{x^{-2}}$.

б) $y=\operatorname{arctg} x$; г) $y=\log_{0,5} x$;

3 Произведение двух бесконечно малой и бесконечно большой величин является:

а) бесконечно малой величиной;

б) бесконечно большой величиной;

в) неопределенностью.

4 Выяснить, какие из перечисленных функций непрерывны в точке $x=0$:

а) $y=\dfrac{1}{x}$; б) $y=\begin{cases} 1, & если\ \ x\le 0; \\ x, & если\ \ x>0; \end{cases}$ в) $y=\operatorname{tg} x$.

г) $y = \sqrt{x}$; д) $y = \begin{cases} -x, & \textit{если } x < 0; \\ x, & \textit{если } 0 \le x \le 3; \\ -x+5, & \textit{если } x > 3; \end{cases}$

5 Определить, какой из указанных пределов равен $\frac{3}{2}$:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-10}{2x^2+7x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-10}{2x^3+7x+5}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2-10}{2x^2+7x+5}$;

6 Найти $a = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2+3}\right)^{x^2}$, в ответе указать $\ln a$:

а) 1; б) –2; в) 2; г) $\frac{2}{3}$.

7 Найти a, если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+3x^2-18}{ax^4-18x^2+3} = \frac{1}{2}$.

8 Найти a, если $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{8x} = 2$.

Задания для самоконтроля

Вариант 1

1 Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^3+1}{3x^2+x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+5}\right)^{-3x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-5x+6}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

***Ответы*:** а) 2; б) –12; в) 0; г) e^3; д) –1; е) $-\frac{1}{2}$.

2 Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функций (указать их характер):

а) $y=\begin{cases} x-1, & \text{если } x\ge 0; \\ -x-1, & \text{если } x<0; \end{cases}$

в) $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x+1}}}$.

б) $y=\dfrac{5}{x^2-9}$;

Вариант 2

1 Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-\sqrt{x}}{1+8x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+5}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x-1}\right)^{2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(8x\cdot\operatorname{ctg}x)$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 3x}$.

Ответы: а) $\dfrac{1}{2}$; б) 0; в) ∞; г) $e^{\frac{8}{7}}$; д) 8; е) $-\dfrac{1}{54}$.

2 Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функций (указать их характер):

а) $y=\begin{cases} 3x+1, & \text{если } x\ge 0; \\ -3x+1, & \text{если } x<0; \end{cases}$

в) $y=\dfrac{1}{3+5^{\frac{3}{x-2}}}$.

б) $y=\dfrac{7}{16-x^2}$;

Список литературы

1 **Красс, М. С.** Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – Санкт-Петербург.:Питер, 2007. – 464 с.

2 Высшая математика для экономических специальностей / Под ред. Н. Ш. Кремера. – Москва: Высшее образование, 2008. – 893 с.

3 **Письменный, Д. Т**. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.