ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к практическим занятиям для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Могилев 2013

УДК 517
ББК 22.1я73
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «3» октября 2012 г., протокол № 2

Составители: Е. Г. Галуза; М. Н. Зубова; В. А. Карпенко;
В. В. Пугин; А. А. Романенко

Рецензент канд. техн. наук, доц. Д. М. Макаревич

В методических указаниях изложен материал по теме «Системы дифференциальных уравнений», который могут использовать студенты всех специальностей как дневной, так и заочной форм обучения при самостоятельной работе, а также преподаватели для проведения практических занятий.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск Л. В. Плетнёв

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать 14.01.2013. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 56 экз. Заказ № 11.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/0548519 от 16.06.2009.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

1 Общие сведения о системах дифференциальных уравнений

В приложениях математики к изучению технических дисциплин, химии, биологии, технологии производств, финансово-экономических дисциплин важную роль играют математические модели на основе обыкновенных дифференциальных уравнений вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ для одной исследуемой функции $y = y(x)$ – функции одной переменной x.

На практике встречаются процессы, для описания которых (для изучения которых) одной функции недостаточно. Они, эти функции, зависят от одного и того же аргумента и связаны между собой системой дифференциальных уравнений.

Рассмотрим основные понятия, задачи и теоремы для системы дифференциальных уравнений.

Совокупность соотношений

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0,\\ &F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0,\\ &...\\ &F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где x – независимая переменная;

$y_1, y_2, ..., y_n$ – искомые функции, зависящие от x, называется ***системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка***.

Решением системы (1) называется всякая система из n функций $y_1, y_2, ..., y_n$, подстановка которых в уравнения (1) обращает все эти уравнения в тождества.

Например, система

$$\left.\begin{aligned} &z' - \frac{1}{3}(4 - x)y - z + 2x = 0,\\ &x^2 y' - 2z' - 6z + 4x = 0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

состоящая из двух уравнений с двумя неизвестными (искомыми) функциями y и z, имеет решение $y = 3x^2$, $z = x^3 - x^2$. Следовательно, $y' = 6x$, $z' = 3x^2 - 2x$ и, значит,

$$3x^2 - 2x - \frac{1}{3}(4 - x)3x^2 - x^3 + x^2 + 2x = 0,$$
$$6x^2 - 2(3x^2 - 2x) - 6(x^3 - x^2) + 4x = 0.$$

Следовательно, решение системы (2) найдено верно.

Система (1) дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от независимых функций, называется *нормальной системой n* дифференциальных уравнений с *n* неизвестными функциями $y_1, y_2, ..., y_n$ и имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ &\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ &... \\ &\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Эту систему можно рассматривать как обобщение одного дифференциального уравнения первого порядка (с одной неизвестной функцией), разрешенного относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad (4)$$

т. е. систему (3) можно записать в более компактном виде, если пользоваться векторной записью, а именно

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}),$$

где

$$\vec{f}(x, \vec{y}) = (f_1(x, \vec{y}), f_2(x, \vec{y}), ..., f_n(x, \vec{y}),),$$

$$\vec{y} = \vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)).$$

Как известно, решение $y = \varphi(x)$ уравнения (4) геометрически представляет собой некоторую кривую (интегральную кривую уравнения), лежащую на плоскости *xoy*.

Аналогичным образом решение нормальной системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \\ &\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

т. е. пару функций $y(x)$ и $z(x)$ можно рассматривать как некоторую кривую в трехмерном пространстве *XYZ*. Эту кривую называют интегральной кривой системы (5) в этом пространстве.

В случае $n > 2$ решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, …, $y_n = \varphi_n(x)$ нормальной системы (3) нельзя аналогичным образом изобразить кривой, не выходя за пределы трехмерного пространства.

Однако, обобщая геометрическую терминологию, по-прежнему будем считать, что решение

$$y_1 = \varphi_1(x),\ \ y_2 = \varphi_2(x),\ ...,\ y_n = \varphi_n(x) \tag{6}$$

системы (3) определяет собой интегральную кривую системы (3), лежащую в $(n + 1)$-мерном пространстве переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Задание нормальной системы уравнений (3) можно по аналогии с двумерным случаем геометрически толковать как задание поля направлений в некоторой области $(n + 1)$-мерного пространства.

Говорят, что решение (6) системы (3) удовлетворяет начальным данным $x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$, если $\varphi_1(x_0) = y_{10}$, $\varphi_2(x_0) = y_{20}$, …, $\varphi_n(x_0) = y_{n0}$. Геометрически это значит, что интегральная кривая (6) проходит через точку $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ $(n + 1)$-мерного пространства.

Задача Коши для нормальной системы (3) и начальных данных x_0, $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ ставится следующим образом: найти решение системы (3), удовлетворяющее начальным данным $x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$.

Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши даются следующей теоремой.

Теорема Коши. Если в некоторой области D $(n + 1)$-мерного пространства функции $f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то для любой точки $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ области D существует, и при том единственное, решение $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ ...,\ y_n = \varphi_n(x)$ системы (3), определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям $x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$.

Из теоремы Коши следует, что в указанной области D система (3) имеет бесчисленное множество решений. Действительно, изменяя значения $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ в некоторых пределах, для каждой системы чисел x_0, y_{10}, $y_{20}, \ldots, y_{n0}$ получим «свое» решение системы:

$$y_1 = \varphi_1(x, y_{10}, y_{20},..., y_{n0}),\ \ y_2 = \varphi_2(x, y_{10}, y_{20},..., y_{n0}),\ ...,\ y_n = \varphi_n(x, y_{10}, y_{20},..., y_{n0}).$$

Общим решением системы (3) в некоторой области D $(n + 1)$-мерного пространства называются n функций

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2,..., C_n),\ \ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2,..., C_n),\ ...,\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2,..., C_n), \tag{7}$$

зависящих от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, если эти функции (7) являются решением системы (3) и если любое решение этой системы, лежащее в указанной области D, может быть записано в виде (7) при некоторых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Частным решением системы (3) называется решение, которое получается из общего решения системы при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Если в области D выполнены условия теоремы Коши, то для нахождения частного решения, «проходящего через заданную точку $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ области», достаточно разрешить уравнения

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_{10},\\
&\varphi_2(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_{20},\\
&...\\
&\varphi_n(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_{n0}
\end{aligned}$$

относительно $C_1, C_2, ..., C_n$ и подставить полученные значения постоянных в (7).

Нормальная система уравнений (3) в случае $n = 3$ допускает простую *механическую интерпретацию*.

Обозначим независимую переменную через t, а искомые функции через x, y и z и будем *рассматривать* t как время, а x, y и z как координаты движущейся частицы.

При этом решение

$$x = \varphi_1(t), \ \ y = \varphi_2(t), \ \ z = \varphi_3(t)$$

системы

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y, z),\\
\frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y, z),\\
\frac{dz}{dt} &= f_3(t, x, y, z)
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

определяет положение движущейся частицы в любой момент времени t, т. е. определяет закон движения частицы.

Кривая пространства XYZ, задаваемая уравнениями $x = \varphi_1(t), \ \ y = \varphi_2(t), \ \ z = \varphi_3(t)$, будет *траекторией движения*, а производные $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ – координатами вектора скорости движущейся частицы.

Решить для системы (8) задачу Коши с начальными данными t_0, x_0, y_0, z_0 – значит, найти закон движения той частицы, которая в момент времени t_0 находилась в точке (x_0, y_0, z_0).

При такой интерпретации система (8) называется *динамической*, пространство XYZ – *фазовым*, а решения системы (8) – *движениями*.

Если функции f_1, f_2, f_3 системы (8) не зависят от времени, то движение частиц называется *стационарным* (скорости движения частиц в каждой точке пространства XYZ не зависят от времени, т. е. являются постоянными в течение всего времени). Если при этом функции f_1, f_2, f_3 удовлетворяют условиям теоремы Коши, то через каждую точку фазового пространства будет проходить только одна траектория, т. к. в любой момент времени в этой точке вектор скорости имеет одну и ту же величину и направление.

2 Метод исключения для нормальных систем дифференциальных уравнений

Изучение нормальных систем дифференциальных уравнений и их свойств тесно связано с изучением дифференциальных уравнений высших порядков от одной неизвестной функции.

Пусть дано, например, уравнение

$$y''' = f(x, y, y', y''), \tag{9}$$

из которого можно получить нормальную систему трех дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями: обозначим $y = y_1$.

Тогда

$$y' = y_1' = y_2, \quad y'' = (y')' = y_2' = y_3, \quad y''' = (y'')' = y_3'.$$

Итак, вместо уравнения (9) имеем нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ y_3' &= f(x, y_1, y_2, y_3). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Если y_1, y_2, y_3 – решение системы (10), то $y_1 = y$ – решение уравнения (9) и, наоборот, если y – решение уравнения (9), то $y_2 = y'_1$ и $y_3 = y'_1$ есть решение системы (10).

При определенных условиях справедливо и обратное утверждение: всякая нормальная система дифференциальных уравнений (3) эквивалентна некоторому дифференциальному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией, разрешенному относительно производной.

Сведение интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений к интегрированию одного дифференциального уравнения высшего порядка является одним из основных методов интегрирования нормальных систем.

Приведем доказательство этого утверждения.

Дифференцируем по x обе части первого уравнения системы (3):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{dy_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+...+\frac{df_1}{dy_n}\cdot\frac{dy_n}{dx}.$$

Заменяя производные $\frac{dy_1}{dx},\frac{dy_2}{dx},...,\frac{dy_n}{dx}$ их выражениями $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из системы (3), будем иметь уравнение

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,...,y_n).$$

Дифференцируя полученное уравнение и поступая аналогично предыдущему, найдем

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,...,y_n).$$

Продолжая далее таким же образом, получим, наконец, уравнение

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,...,y_n).$$

Итак, получаем следующую систему:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,...,y_n),\\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,...,y_n),\\ ...\\ \dfrac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,...,y_n).\end{array}\right\} \qquad (11)$$

Из первых $n-1$ уравнений определим $y_2, y_3, ..., y_n$, выразив их через x, y_1 и производные $\frac{dy_1}{dx},\frac{d^2y_1}{dx^2},...,\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ (предполагается, что эти операции выполнимы):

$$\left.\begin{array}{l}y_2=\varphi_2(x,y_1,y_1',...,y_1^{(n-1)}),\\ y_3=\varphi_3(x,y_1,y_1',...,y_1^{(n-1)}),\\ ...\\ y_n=\varphi_n(x,y_1,y_1',...,y_1^{(n-1)}).\end{array}\right\} \qquad (12)$$

Подставляя в последнее уравнение системы (11) вместо $y_2, y_3, ..., y_n$ их значения из системы (12), получим уравнение

$$\frac{d^n y_1}{dx^n}=\Phi(x,y_1,y_1',...,y_1^{(n-1)})\,. \tag{13}$$

Решая это уравнение, определим y_1:

$$y_1=\psi_1(x,C_1,C_2,...,C_n). \tag{14}$$

Дифференцируя равенство (14) $n-1$ раз, найдем y'_1, y''_1, ..., $y_1^{(n-1)}$ как функции от x и C_1, C_2, …, C_n. Подставляя затем эти функции $y_1=\psi_1(x,C_1,C_2,...,C_n)$, $y_1'=\psi_1'(x,C_1,C_2,...,C_n)$, …, $y_1^{(n-1)}=\psi_1^{(n-1)}(x,C_1,C_2,...,C_n)$ в систему (12), получим

$$\left.\begin{aligned} &y_2=\psi_2(x,C_1,C_2,...,C_n),\\ &...\\ &y_n=\psi_n(x,C_1,C_2,...,C_n).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Функции (14) и (15) являются общим решением нормальной системы (3).

Для отыскания частного решения нормальной системы (3) при наличии начальных данных x_0, y_{10}, y_{20}, …, y_{n0} нужно в систему функций (14) и (15) подставить начальные данные и затем из нее найти C_i (x_0, y_{10}, y_{20}, …, y_{n0}) = $= C_{i0}$ ($i=\overline{1,n}$). Найденные C_{i0} подставляем в систему функций из уравнений (14) и (15) и получим искомое частное решение, т. е. решение задачи Коши для системы (3) при известных начальных данных x_0, y_{10}, y_{20}, …, y_{n0}.

Замечание 1. Если система (3) линейна относительно искомых функций, то и уравнение (13) будет линейным.

Пример 1 – Решить систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}=y+z,\\ &\frac{dz}{dx}=y+z+x.\end{aligned}\right\}$$

Решение

Данная система – нормальная система двух уравнений с двумя неизвестными (искомыми) функциями y и z.

Продифференцируем первое уравнение по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}$$

и заменим $\frac{dz}{dx}$ его значением из системы.

Получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + y + z + x.$$

Подставляя $\frac{dy}{dx}$ вместо $y + z$ из первого уравнения системы, приходим к линейному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = x. \tag{16}$$

Решаем это уравнение:

$$y'' - 2y' = 0, \quad \kappa^2 - \kappa = 0, \ \ \kappa_1 = 0, \ \kappa_2 = 2.$$

$y = C_1 + C_2e^{2x}$ – общее решение однородного уравнения, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

$$y_ч = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

$$y_ч' = 2Ax + B, \qquad y_ч'' = 2A,$$

$$2A - 2(2Ax + B) = x, \quad A = -\frac{1}{4},$$

$$B = -\frac{1}{4}, \ \ y_ч = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x = -\frac{1}{4}x(x+1).$$

$$y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, – общее решение вспомогательного уравнения (16).

Подставляя найденное значение y и $y' = 2C_2e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ в первое уравнение системы, находим

$$z = 2C_2e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - C_1 - 2C_2e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x,$$

т. е.

$$z = -C_1 + 2C_2e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1).$$

Семейство решений исходной (данной) системы уравнений определяется функциями

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1),$$

$$z = -C_1 + 2C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Замечание 2. Из первых n – 1 уравнений системы (11) находим функции y_2, y_3, …, y_n. Может, иногда, оказаться, что их можно найти из меньшего числа уравнений. Тогда для определения y_1 (см. формулу (13)) получим дифференциальное уравнение, порядок которого ниже n.

Пример 2 – Проинтегрировать (решить) систему

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = x + z, \quad \frac{dz}{dt} = x + y.$$

Решение

Дифференцируя по t первое уравнение, находим следующее:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = (x+z) + (x+y),$$

т. е.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z.$$

Исключая переменные y и z из уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + z \quad \text{и} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z,$$

будем иметь уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

Для него характеристическое уравнение $\kappa^2 - \kappa - 2 = 0$, $\kappa_1 = -1$, $\kappa_2 = 2$ и общее решение

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

Тогда

$$\frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}.$$

Следовательно, из первого уравнения системы имеем

$$y = \frac{dx}{dt} - z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - z. \tag{17}$$

Подставляя в третье уравнение системы вместо x и y их значения, получим для определения z уравнение

$$\frac{dz}{dt} + z = 3C_2 e^{2t}.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$z = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}. \tag{18}$$

Следовательно, на основании формул (17) и (18) имеем, что

$$y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t} - C_2 e^{2t} = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

Итак, функции $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$, $y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}$, $z = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}$ являются общим решением заданной системы.

Примечание – После нахождения одной из функций дифференциальной системы (3) остальные функции находят, не используя операцию интегрирования, а только дифференцирование и метод исключения.

Пример 3 – Решить систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2}{z}, \\ \frac{dz}{dx} &= y. \end{aligned}\right\}$$

Решение

Дифференцируем второе уравнение системы по x. Получаем

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dy}{dx}.$$

Вместо $\frac{dy}{dx}$ из первого уравнения системы подставляем значения $\frac{y^2}{x}$, получаем уравнение

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{y^2}{z},$$

в которое вместо y подставим его значение z' из второго уравнения системы. Получаем уравнение второго порядка $z'' = \frac{(z')^2}{z}$, т. е. $z''z - (z')^2 = 0$, которое не содержит явно аргумент x и поэтому допускает понижение порядка. Разделив обе части последнего равенства на z^2, получим

$$\frac{zz'' - (z')^2}{z^2} = \left(\frac{z'}{z}\right)' = 0,$$

откуда имеем, интегрируя,

$$\frac{z'}{z} = C_1,$$

или

$$z' = C_1 z.$$

Из последнего уравнения получаем (интегрированием)

$$z = C_2 e^{C_1 x}.$$

Так как $y = \frac{dz}{dx}$, что видно из второго уравнения системы, получаем

$$y = C_1 C_2 e^{C_1 x}.$$

Таким образом, $y = C_1 C_2 e^{C_1 x}$, $z = C_2 e^{C_1 x}$ – общее решение исходной системы.

3 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера применим для случая $n = 3$. Обозначая неизвестные функции независимой переменной x через y, z, w, запишем линейную однородную систему с постоянными коэффициентами в виде

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}w, \\ \frac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}w, \\ \frac{dw}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}w. \end{cases} \qquad (19)$$

Согласно методу Эйлера, ненулевые решения системы (19) ищут в виде

$$y = \alpha e^{kx}, \;\; z = \beta e^{kx}, \quad w = \gamma e^{kx}, \tag{20}$$

где α, β, γ, k – некоторые числа, которые надо подобрать так, чтобы функции (20) удовлетворяли системе (19).

Подставляя функции (20) и их производные в уравнения системы (19), получим

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{33}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Для того чтобы система (21) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю. Таким образом, число k должно удовлетворять уравнению

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

Уравнение (22) называется характеристическим (или вековым). По основной теореме алгебры оно имеет три корня: k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (21). Обозначим эти решения $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,\;\; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \;\;\; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Тогда ненулевые решения системы (19) имеют вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e^{k_1 x}, \quad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \quad w_1 = \gamma_1 e^{k_1 x}, \\ y_2 &= \alpha_2 e^{k_2 x}, \quad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \quad w_2 = \gamma_2 e^{k_2 x}, \\ y_3 &= \alpha_3 e^{k_3 x}, \quad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \quad w_3 = \gamma_3 e^{3kx}. \end{aligned}$$

Линейная комбинация этих решений (с произвольными постоянными коэффициентами)

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3, \\ z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3, \\ w &= C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3 \end{aligned} \tag{23}$$

также будет решением системы (19).

Если корни k_1, k_2, k_3 различны, то решение (23) будет общим решением системы (19) в области

$$\{-\infty < x < +\infty, \; -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < w < +\infty\}.$$

Для случая кратных корней вопрос рассматривать не будем.

Если $y = u + iv$, $z = s + it$, $w = p + iq$ – комплексное решение системы (19), то действительные и мнимые части их также составляют решения системы (19). В случае, если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – корни характеристического уравнения, то найденные комплексные решения можно заменить действительными решениями, отделяя действительные и мнимые части составляющих их функций.

Пример 1 – Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + z + w, \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z + w, \\ \dfrac{dw}{dx} = y + z + w. \end{cases} \tag{24}$$

Решение

Ищем решение системы (24) в виде $y = \alpha e^{kx}$, $z = \beta e^{kx}$, $w = \gamma e^{kx}$. Подставляя эти функции в уравнения, после сокращения на e^{kx} ($e^{kx} \neq 0$) получаем

$$\begin{cases} -(1+k)\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + (-1-k)\beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + (1-k)\gamma = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 & 1 \\ 1 & -1-k & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (1+k)(4-k^2) = 0.$$

Его корни $k_1 = -1$, $k_2 = -2$, $k_3 = 2$.

Подставляем $k_1 = -1$ в систему (25) и получим

$$\begin{cases} 0 \cdot \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + 2 \cdot \gamma = 0. \end{cases}$$

Третье уравнение отбрасываем (оно следует из первых двух) и находим $\alpha = -\gamma$, $\beta = -\gamma$, где γ – любое число. Задав γ какое-нибудь конкретное значение, например, $\gamma = -1$, находим решение системы (24):

$$y_1 = e^{-x}, \quad z_1 = e^{-x}, \quad w_1 = e^{-x}.$$

Теперь подставим $k_2 = -2$ в систему (25) и получим

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Решая систему из двух последних уравнений с тремя неизвестными, получаем $\beta = -\alpha,\ \gamma = 0$, где α – любое число. Полагая $\alpha = 1$, находим второе решение системы (24):

$$y_2 = e^{-2x}, \quad z_2 = e^{-2x}, \quad w_2 = e^{-2x}.$$

Подставляя $k_3 = 2$ в систему (25), получим

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha - 3\beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta - \gamma = 0. \end{cases}$$

Отбрасывая третье уравнение, получаем $\beta = \dfrac{\gamma}{2}, \alpha = \dfrac{\gamma}{2}$, где γ – любое число. Положив $\gamma = 2$, находим $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$. Тогда третье решение системы будет иметь вид:

$$y_3 = e^{2x}, \quad z_3 = e^{2x}, \quad w_3 = e^{2x}.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} &y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x}, \\ &z = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x}, \\ &w = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Пример 2 – Найти решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 3z, \end{cases} \tag{26}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1$, $z(0) = 1$.

Решение

Ищем решение системы (26) в виде $y = \alpha e^{kx}$, $z = \beta e^{kx}$. При этом получаем

$$\begin{cases} (1-k)\alpha - 2\beta = 0, \\ \alpha + (3-k)\beta + \gamma = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 - 4k + 5 = 0.$$

Корни $k_{1,2} = 2 \pm i -$ комплексно-сопряженные. Подставляя $k_1 = 2 + i$ в систему (27), получим

$$\begin{cases} (-1-i)\alpha + 2\beta = 0, \\ \alpha + (1-i)\beta = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения (второе – следствие первого) находим $\beta = \dfrac{1+i}{2}\alpha$. Взяв $\alpha = 2$, имеем $\beta = 1+i$, т. е. первое решение системы (26) будет иметь вид:

$$y_1 = 2e^{(2+i)x}, \quad z_1 = (1+i)e^{(2+i)x}.$$

Подставляя $k_2 = 2 - i$ в систему (27), получим

$$\begin{cases} (-1+i)\alpha - 2\beta = 0, \\ \alpha + (1+i)\beta = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $\beta = \dfrac{-1+i}{2}\alpha$. Взяв $\alpha = 2$, имеем $\beta = -1+i$. Тогда второе решение системы (26) будет иметь вид:

$$y_2 = 2e^{(2-i)x}, \quad z_2 = (-1+i)e^{(2-i)x}.$$

Найдем действительные и мнимые части функций:

$$y_1 = 2e^{(2+i)x} = 2e^{2x}(\cos x + i\sin x) = 2e^{2x}\cos x + 2ie^{2x}\sin x,$$
$$y_2 = 2e^{(2-i)x} = 2e^{2x}(\cos x - i\sin x) = 2e^{2x}\cos x - 2ie^{2x}\sin x,$$

$$z_1 = (1+i)e^{(2+i)x} = (1+i)e^{2x}(\cos x + i\sin x) =$$
$$= e^{2x}(\cos x - \sin x) + ie^{2x}(\cos x + \sin x),$$

$$z_2 = (-1+i)e^{(2-i)x} = (-1+i)e^{2x}(\cos x - i\sin x) =$$
$$= -e^{2x}(\cos x - \sin x) + ie^{2x}(\cos x + \sin x).$$

Действительные решения системы имеют вид:

$$\widetilde{y}_1 = 2e^{2x}\cos x, \quad \widetilde{z}_1 = e^{2x}(\cos x - \sin x),$$
$$\widetilde{y}_2 = 2e^{2x}\sin x, \quad \widetilde{z}_2 = e^{2x}(\cos x + \sin x).$$

Тогда общее решение системы запишется в виде

$$y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x),$$
$$z = e^{2x}(C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x)),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Теперь решим задачу Коши. Подставляя в общее решение системы вместо x, y, z их начальные значения 0, –1, 1, имеем

$$\begin{cases} -1 = C_1 + 0\cdot C_2, \\ 1 = C_1 + C_2. \end{cases}$$

Отсюда получаем $C_1 = -1$, $C_2 = 2$.

Ответ: Искомое решение системы имеет вид:

$$y_1 = e^{2x}(-\cos x + 2\sin x), \quad z_1 = e^{2x}(\cos x + 3\sin x).$$

4 Метод интегрируемых комбинаций для нормальных систем

Другой способ решения нормальных систем дифференциальных уравнений основан на подборе так называемых ***интегрируемых комбинаций***. Познакомимся с ним на примере.

Пример 1

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= z - x, \\ \frac{dz}{dt} &= x - y. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Решение

Обозначив производные функций x, y, z символами x', y', z' и сложив уравнения системы (28), получим

$$x' + y' + z' = 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}(x + y + z) = 0,$$

откуда

$$x + y + z = C_1. \tag{29}$$

Аналогично, умножив первые уравнения системы (28) на x, второе на y и третье на z и сложив, получим

$$xx' + yy' + zz' = 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \tag{30}$$

Выражения вида (29) и (30), представляющие ***конечные соотношения между искомыми функциями и независимой переменной***, называют ***первыми интегралами системы***. В нашем частном случае независимая переменная t в соотношения (29) и (30) не входит.

Если бы удалось получить еще один первый интеграл, выражаемый через x, y, z, то задача (28) была бы решена.

Заметим, что знание каждого первого интеграла для системы позволяет понизить порядок уравнения (13), к которому сводится система (3), на единицу.

Действительно, система трех уравнений (28) должна приводиться к одному дифференциальному уравнению 3-го порядка.

Продифференцируем по t третье уравнение системы (28).

Это дает

$$z'' = x' - y' = x + y - 2z. \tag{31}$$

Воспользовавшись первым интегралом (29), имеем

$$x + y = C_1 - z$$

и от уравнения (31) приходим к уравнению 2-го порядка

$$z'' + 3z = C_1$$

для отыскания функции z системы (28).

5 Упражнения

5.1 Найти общие и частные решения (там, где заданы начальные условия) для следующих систем дифференциальных уравнений.

5.1.1 $\dfrac{dy}{dx} = 3y - z, \quad \dfrac{dz}{dx} = 5y - z,$
если $y_0 = 1,\ z_0 = z$ при $z_0 = 0.$

5.1.2 $\begin{aligned} x' &= 2x + y + 3e^{-t}, \\ y' &= x - 2y + 4e^{t}. \end{aligned}$

5.1.3 $\left.\begin{aligned} x' &= 2x - y + z, \\ y' &= x + 2y - z, \\ z' &= x - y + 2z. \end{aligned}\right\}$

5.1.4 $\left.\begin{aligned} y' &= 2xy^2, \\ z' &= \frac{z - x}{x}. \end{aligned}\right\}$

5.1.5 $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y + z, \\ z' = 2z. \end{cases}$

5.1.6 $\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = x - y + z. \end{cases}$

5.1.7 $\begin{cases} x' - z = 0, \\ y' + 4x + y + 4z = 0, \\ z' + y = 0. \end{cases}$

5.1.8 $\begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = x + 1. \end{cases}$

5.1.9 $\begin{cases} tx' = -x + yt, \\ t^2 y' = -2x + yt. \end{cases}$

5.1.10 $\begin{cases} y' = y + z + x, \\ z' = -4y - 3z + 2x, \end{cases}$
если $y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

5.1.11 $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y. \end{cases}$

5.1.12 $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2x_2, \\ x_1' = x_1 + 3x_2. \end{cases}$

5.1.13 $\begin{cases} x_1' = -7x_1 + x_2, \\ x_1' = -2x_1 - 5x_2. \end{cases}$

5.1.14 $\begin{cases} y' + 2y + 4z = 1 + 4x, \\ z' + y - z = \dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$

5.1.15 $\begin{cases} y' = z, \\ z' = x. \end{cases}$

5.1.16 $\begin{cases} y' = z, \\ z' = y. \end{cases}$

5.1.17 $\begin{cases} y' + 2y - 4z = 0, \\ z' + y - 3z = 3x^2. \end{cases}$

5.1.18 $\begin{cases} 6u' - u - 7v + 5w = 10e^x, \\ 2v' + u + v - w = 0, \\ 3w' - u + 2v - w = e^x. \end{cases}$

5.1.19 $\begin{cases} x' + 2x + y = \sin t, \\ y' - 4x - 2y = \cos t, \end{cases}$
если $x(\pi) = 1$, $y(\pi) = 2$.

5.1.20 $\begin{cases} y' = -y - 2z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$

5.1.21 $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

5.1.22 $\begin{cases} x' = -4x + 2y + 5z, \\ y' = 6x - y - 6z, \\ z' = -8x + 3y + 9z. \end{cases}$

5.1.23 $\begin{cases} y' = y - 2z + 3, \\ z' = y + z + 1. \end{cases}$

5.1.24 $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$

5.1.25 $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = -4y + z. \end{cases}$

5.1.26 $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2, \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2, \\ x_3' = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, \end{cases}$
если $x_1(0) = 6$, $x_2(0) = -6$, $x_3(0) = 24$.

5.1.27 $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2, \\ x_2' = -2x_1 + 3x_2. \end{cases}$

5.1.28 $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2, \\ x_2' = 4x_1 + 6x_2. \end{cases}$

5.1.29 $\begin{cases} x_1' = -x_2 + t^2, \\ x_2' = x_1 + e^t. \end{cases}$

5.1.30 $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3. \end{cases}$

5.1.31 $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + 3y_3. \end{cases}$

5.1.32 $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2 + 4x + 1, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + x, \end{cases}$
если $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

5.1.33 $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 + e^x, \\ y_2' = y_1 + y_2 + y + x_3, \\ y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3, \end{cases}$
если $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -0{,}16$, $y_3(0) = 0{,}27$.

5.1.34 $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_1, \end{cases}$
если $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 1$.

5.1.35 $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_3, \\ y_2' = y_2 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2, \end{cases}$

если $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 0$.

5.1.36 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = xy + y^2. \end{cases}$

5.1.37 $\begin{cases} x_1' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y, \end{cases}$

если $x(0) = 2$, $y(0) = 0$.

5.1.38 $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2, \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$

5.1.39 $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2, \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2, \\ x_3' = 2x_1 + 3x_2 + 4x_2, \end{cases}$

если $x_1(0) = 6$, $x_2(0) = -6$, $x_3(0) = 24$.

Ответы

5.1.1 Общее решение данной системы определяется формулами

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x),$$
$$z = e^x \left[(2C_1 - C_2)\cos x + (C_1 + 2C_2)\sin x\right].$$

Частное решение получается при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ и имеет вид:

$$y = e^x \cos x, \qquad z = e^x (2\cos x + \sin x).$$

5.1.2 $x(t) = C_1 e^{-\sqrt{5}t} + C_2 e^{\sqrt{5}t} - 1{,}5e^{-t} + 2e^t,$

$y(t) = C_2(\sqrt{5} - 2)e^{\sqrt{5}t} - (\sqrt{5} + 2)C_1 e^{-\sqrt{5}t} + 1{,}5e^{-t} - 2e^t.$

5.1.3 $z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \quad x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \quad y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$

5.1.4 $y = \dfrac{1}{x^2 + C_1}, \qquad z = x(C_2 - \ln|x|).$

5.1.5 $z = C_1 e^{2t}, \quad y = (C_1 t + C_2)e^{2t}, \quad x = \left(\dfrac{C_1}{2} t^2 + C_2 t + C_3\right)e^{2t}.$

5.1.6 $x = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t,$

$y = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t,$

$x = C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t.$

5.1.7 $x = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t},$

$y = -C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{-2t} - 4C_3 e^{2t},$

$x = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} + 2C_3 e^{2t}.$

5.1.8 $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1, \qquad y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1.$

5.1.9 $x = C_1 + C_2 t, \qquad y = \dfrac{C_1}{t} + 2C_2, \quad t \neq 0.$

5.1.10 Общее решение системы имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + 5x - 9, \qquad z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)e^{-x} - 6x + 14.$$

Частное решение системы имеет вид:

$$y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9, \qquad z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14.$$

5.1.11 $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \quad z = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \quad y = -(C_1 + C_2)e^{-t} + C_2 e^{2t}.$

5.1.12 $x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{4t}, \qquad x_2 = -\dfrac{1}{2} C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$

5.1.13 $x_1 = C_1 e^{-6t} \cos t + C_2 e^{-6t} \sin t,$

$x_2 = C_1 e^{-6t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \sin t).$

5.1.14 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x^2 + x, \qquad z = -C_1 e^{2x} + \dfrac{C_2}{4} e^{-3x} - \dfrac{1}{2} x^2.$

5.1.15 $y = \dfrac{1}{2} C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \qquad z = \dfrac{1}{2} C_1 e^x - C_2 e^{-x}.$

5.1.16 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \qquad z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}.$

5.1.17 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 6x^2 + 6x - 9, \quad z = \dfrac{1}{4} C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 3x^2 - 3.$

5.1.18 $u = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + e^x,$

$v = 2C_1 + \frac{1}{2}(C_2 - C_3)\cos x - \frac{1}{2}(C_2 + C_3)\sin x,$

$w = 3C_1 - \frac{1}{2}(C_2 + C_3)\cos x + \frac{1}{2}(C_2 - C_3)\sin x + e^x.$

5.1.19 $x = 1 - 2(t - \pi) + 2\sin t, \qquad y = 4(t - \pi) - 2\cos t - 3\sin t.$

5.1.20 $y = e^x - 2e^{2x}, \qquad z = -e^x + 3e^{2x}.$

5.1.21 $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x), \qquad z = e^{2x}(C_1\sin x - C_2\cos x).$

5.1.22 $x = C_1e^{2t} + (C_2t + C_2 + C_3)e^t,$

$y = -2C_1e^{2t} + 3C_2e^t,$

$z = 2C_1e^{2t} + (C_2t + C_3)e^t.$

5.1.23 $y = -2e^{-x} + C_1e^x + 2C_2e^x, \qquad z = e^{-x} - C_1e^x - 3C_2e^x.$

5.1.24 $x = C_1\cos t + C_2\sin t, \; y = C_1\sin t - C_2\cos t.$

5.1.25 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}, \quad z = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x}.$

5.1.26 $x_1 = 3e^t + 3e^{5t}, \qquad x_2 = -9e^t + 3e^{5t}, \qquad x_3 = 7e^t + 2e^{4t} + 15e^{5t}.$

5.1.27 $x_1' = (C_1\cos t + C_2\sin t)e^{2t},$

$x_2' = ((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t)e^{2t}.$

5.1.28 $x_1 = (C_1 + C_2)e^t, \qquad x_2 = (-(2C_1 + C_2) - 2C_3)e^{4t}.$

5.1.29 $x_1 = 2t - \frac{1}{2}e^t, \qquad x_2 = t^2 - 2 + \frac{1}{2}e^t.$

5.1.30 $y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x},$

$y_2 = C_2e^{3x} - 2C_3e^{6x},$

$y_3 = -C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}.$

5.1.31 $y_1 = y_1^{(1,2)} + y_1^{(3)} = (C_1 + C_2 x)e^x + 2C_3,$

$y_2 = y_2^{(1,2)} + y_2^{(3)} = C_1 e^x - C_3,$

$y_3 = y_3^{(1,2)} + y_3^{(3)} = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3.$

5.1.32 $y_1 = \frac{11}{4}e^{-x} - \frac{5}{12}e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{5}{12}(3x+2),$

$y_2 = \frac{11}{4}e^{-x} - \frac{1}{12}e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{12}(3x+2).$

5.1.33 $y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x} + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50},$

$y_2 = C_1 e^x - 2C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x} - e^x + \frac{1}{4}xe^x + \frac{6}{5}x + \frac{21}{25},$

$y_3 = -C_1 e^x - 3C_2 e^{2x} + 3C_3 e^{5x} + \frac{x}{4}e^x - \frac{2}{5}x + \frac{1}{50}.$

Учитывая начальные условия, получим $C_1 = C_2 = C_3 = 0$.
Частное решение имеет вид:

$$y_1 = \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50},$$
$$y_2 = \frac{1}{4}xe^x - e^x + \frac{6}{5}x + \frac{21}{25},$$
$$y_3 = -\frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{4}e^x - \frac{2}{5}x + \frac{1}{50}.$$

5.1.34 $y_1 = y_2 = y_3 = e^x$.

5.1.35 $y_1 = -e^{-x}$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = 0$.

5.1.36 $\frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = dt, \quad -\frac{1}{x+y} = t + C_1;$

$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 + xy}{xy + y^2}, \qquad y = 4x, \ \ldots, \quad x = C_2 y.$

$x = -\frac{C_2}{(t+C_1)(C_2+1)}, \quad y = -\frac{1}{(t+C_1)(C_2+1)}.$

5.1.37 $x(t) = e^t + e^{9t}, \qquad y(t) = -e^t + e^{9t}.$

5.1.38 $x_1 = e^{4t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \quad x_2 = e^{4t}(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t).$

5.1.39 *Решение*

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

В матричной форме система имеет вид: $\dot{X} = AX$.
Характеристическое уравнение для этой системы

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 5.$ Собственные векторы матрицы А таковы:

$$Y^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$X^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^t, \quad X^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad X^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Для нахождения частного решения из данной системы при $t_0 = 0$ постоянные C_1, C_2, C_3 определяют из системы

$$X(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C_1 + & & C_3 \\ -9C_1 + & & C_3 \\ 7C_1 + & C_2 + & C_3 \end{pmatrix},$$

откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$.

Окончательно для искомого частного решения получаем, что

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Список литературы

1 **Бугров, Я. С.** Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1981. – 230 с.

2 **Герасимович, А. И.** Математический анализ / А. И. Герасимович, Н. П. Кеда, М. Б. Сугак. – Минск : Выш. шк., 1990. – 198 с.

3 **Мышкис, А. Д.** Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. – М. : Наука, 1969. – 453 с.

4 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 286 с.

5 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – М. : Высш. шк., 1973. – 364 с.

6 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / Под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 1991. – Ч. 2. – 164 с.

7 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Ч. 2. – 546 с.