ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

***Система упражнений
по аналитической геометрии для студентов
всех специальностей дневной формы обучения***

Могилев 2009

УДК 51
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «28» января 2009 г., протокол № 5

Составитель ст. преподаватель А. М. Бутома

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Л. В. Плетнев

Методические указания содержат образцы решения задач, упражнения для самостоятельной работы и варианты контрольных заданий по аналитической геометрии.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнев
Технический редактор	А. Т. Червинская
Компьютерная верстка	И. А. Алексеюс

Подписано в печать 27.10.2009. Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1.86. Уч.-изд. л. 1.8. Тираж 99 экз. Заказ № 725.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/375 от 29.06.2004 г.
212000, г. Могилев, пр. Мира, 43

Введение

Система упражнений по аналитической геометрии состоит их трех разделов.

Раздел 1 состоит из образцов решения задач по аналитической геометрии.

Раздел 2 содержит задачи, предназначенные для решения их студентами на практических занятиях под руководством преподавателя, а также для самостоятельного решения. Все задачи данного раздела разбиты на два уровня: 1-й уровень – базовый (задачи для обязательного усвоения), 2-й – повышенный (более сложные задачи, в том числе нестандартные, номера задач отмечены символом «*»).

Раздел 3 содержит варианты контрольных заданий.

1 Примеры решения задач

Задача 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P\left(\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ и отсекающей от координатного угла треугольник, площадь которого равна 6 кв. ед.

Решение

Проиллюстрируем условие задачи графически (рисунок 1).

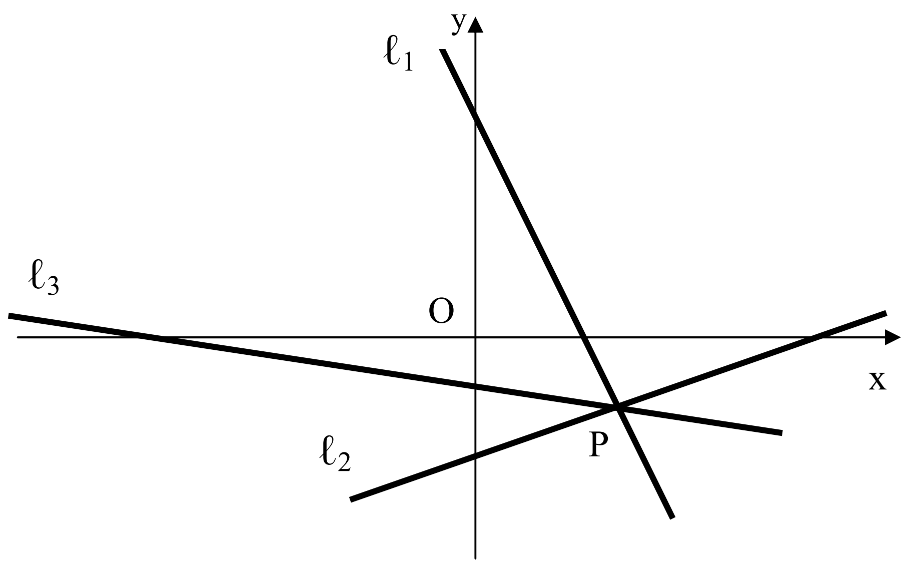

Рисунок 1

Если принять $a > 0$ и $b > 0$ за длину отрезков, отсекаемых прямой на осях координат, то возможны три прямые, удовлетворяющие условию задачи:

$$l_1 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \quad l_2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{-b} = 1; \quad l_3 : \frac{x}{-a} + \frac{y}{-b} = 1.$$

Учитывая, что $ab = 12,\ a > 0,\ b > 0$ и прямые проходят через точку $P\left(\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right)$, будем иметь три системы:

$$\begin{cases} \frac{12}{5a} - \frac{6}{5b} = 1; \\ ab = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{12}{5a} + \frac{6}{5b} = 1; \\ ab = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{12}{5a} + \frac{6}{5b} = 1. \\ ab = 12. \end{cases}$$

Решив первую систему, получим уравнение искомой прямой

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1 \quad \text{или} \quad 3x + y - 6 = 0.$$

При решении второй системы получим две прямые

$\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1$ или $x-3y-6=0$ и $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$ или $3x-4y-12=0$.

При решении третьей системы получим уравнение искомой прямой

$$\frac{x}{-12}+\frac{y}{-1}=1 \text{ или } x+12y+12=0.$$

Задача 2. Даны середины сторон треугольника: $P(2,3)$, $Q(4,-1)$, $R(-3,5)$. Составить уравнения его сторон.

Решение

Воспользовавшись свойством средней линии треугольника, составим уравнение каждой из сторон треугольника *ABC* как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника параллельно противолежащей стороне, т. е. как прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s}(m,n)$.

Уравнение стороны треугольника *ABC*, проходящей через точку $P(2,3)$, получим, подставив координаты этой точки и вектора $\overrightarrow{QR}(-7,6)$ в уравнение прямой следующего вида:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (1)$$

Имеем: $\frac{x-2}{-7}=\frac{y-3}{6}$ или $6x+7y-33=0$.

Подставив в уравнение (1) координаты точки $Q(4,-1)$ и вектора $\overrightarrow{PR}(-5,2)$, получим уравнение второй стороны треугольника

$$\frac{x-4}{-5}=\frac{y+1}{2} \text{ или } 2x+5y-3=0.$$

Наконец, подставив в уравнение (*) координаты точки $R(-3,5)$ и вектора $\overrightarrow{PQ}(2,-4)$, получим уравнение третьей стороны треугольника

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{-4} \text{ или } 2x+y+1=0.$$

Заметим, что для этой задачи можно было бы по координатам середин сторон треугольника определить координаты его вершин *A, B, C* и воспользоваться уравнением прямой, проходящей через две известные точки.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, параллельной оси *Ox* и проходящей через точки $P(4,0,-2)$ и $Q(5,1,7)$.

Решение

Искомая плоскость параллельна оси *Ox*, следовательно, проекция вектора нормали плоскости на эту ось равно нулю, т. е. $\vec{n}(0,B,C)$.Так как плоскость проходит через точки P и Q, то вектор $\vec{n}$ перпендикулярен к вектору $\overrightarrow{PQ}(1,1,9)$.

Воспользовавшись условием ортогональности векторов, заданных своими координатами, будем иметь $B+9C=0$, откуда $B=9,\ C=-1$.

Итак, мы получили нормальный вектор искомой плоскости $\vec{n}(0,9,-1)$. Следовательно, согласно уравнению плоскости, заданной точкой и нормальным вектором, будем иметь:

$$9(y-0)-1(z+2)=0 \text{ или } 9y-z-2=0.$$

Задача 4. Составить уравнение сторон параллелограмма *ABCD* и найти расстояние между параллельными сторонами, если его диагонали пересекаются в точке $M(1,6)$, а стороны *AB, BC, CD, DA* проходят соответственно через точки $P(3,0)$, $Q(6,6)$, $R(5,9)$, $S(-5,4)$.

Решение

Проиллюстрируем условие задачи графически (рисунок 2).

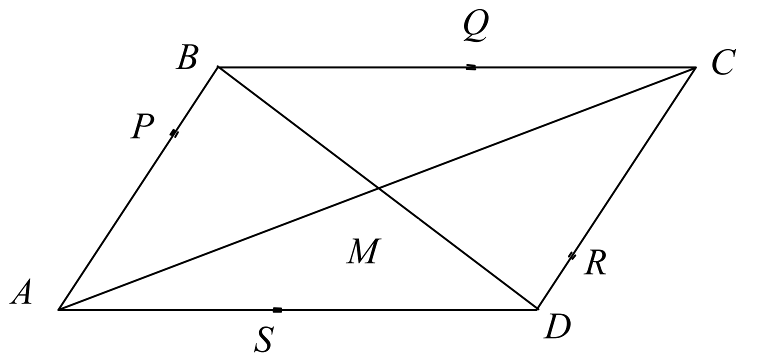

Рисунок 2

Используя уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k, т. е. уравнение прямой вида $y-y_0=k(x-x_0)$, и условие параллельности прямых, составим уравнения сторон *AB* и *DC*:

$$y=k(x-3); \quad y-9=k(x-5). \tag{2}$$

Определим теперь угловой коэффициент k так, чтобы диагональ *AC* параллелограмма в точке $M(1,6)$ делилась пополам.

По формулам деления отрезка пополам находим связь между координатами точек *A* и *C*:

$$\frac{x_A+x_C}{2}=1; \quad \frac{y_A+y_C}{2}=6, \text{ т. е. } \begin{cases} x_A+x_C=2, \\ y_A+y_C=12. \end{cases} \tag{3}$$

Складывая почленно уравнения (2) и используя условия (3), получаем:

$$y_A + y_C - 9 = k(x_A + x_C) - 8k; \quad 3 = 2k - 8k; \quad k = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, подставляя значение $k = -1/2$ в уравнения (*), имеем $y = -\dfrac{x-3}{2}$ или $x + 2y - 3 = 0$ (уравнение стороны *AB*) и $y - 9 = -\dfrac{1}{2}(x - 5)$ или $x + 2y - 23 = 0$ (уравнение стороны *DC*).

Рассуждая аналогично, получаем $2x - y - 6 = 0$ (уравнение стороны *BC*) и $2x - y + 14 = 0$ (уравнение стороны *AD*).

Из полученных уравнений следует, что стороны *AB* и *DC* перпендикулярны к *BC* и *AD* (смотри условие перпендикулярности). Это значит, что *ABCD* – прямоугольник.

Для определения расстояний между параллельными сторонами воспользуемся формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Расстояние между параллельными прямыми *AB* и *DC* равно расстоянию от точки *P* до прямой *DC*: $d_1 = \dfrac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 23|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$

Расстояние между прямыми *BC* и *AD* равно расстоянию от точки *Q* до прямой *AD*: $d_2 = \dfrac{|2 \cdot 6 - 1 \cdot 6 + 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$

Так как расстояния между противоположными сторонами прямоугольника равны между собой, то он является квадратом.

Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 5, 4)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = -6$, а на оси аппликат отрезок $c = 3$.

Решение

Воспользуемся уравнением плоскости в отрезках. По условию $b = -6$, $c = 3$, поэтому

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{3} = 1.$$

Точка M_0 лежит на плоскости, т. е. её координаты удовлетворяют уравнению плоскости $\dfrac{2}{a} + \dfrac{5}{-6} + \dfrac{4}{3} = 1$, откуда $a = 4$. Следовательно, уравнение искомой плоскости $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-6} + \dfrac{z}{3} = 1$.

Задача 6. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - 5z + 3 = 0; \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решение

Определим координаты какой-либо точки прямой. Для этого, полагая, например, что $z = 0$, из уравнений (4) получим систему

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0; \\ 3x + 2y + 2 = 0, \end{cases}$$

решив которую, найдем: $x = -4$, $y = 5$. Таким образом, одна из точек, принадлежащих прямой (4), имеет координаты –4, 5, 0.

Теперь найдем направляющий вектор $\vec{s}$. Имеем $\overrightarrow{n_1}(2, 1, -5)$, $\overrightarrow{n_2}(3, 2, -4)$. Полагаем, что

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}.$$

Отсюда канонические уравнения прямой запишутся в виде

$$\frac{x+4}{6} = \frac{y-5}{-7} = \frac{z}{1}.$$

Задача 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, -2, 4)$ перпендикулярно к плоскостям $2x + 3y - 5z + 6 = 0$ и $3x + 4y - 3z - 5 = 0$.

Решение

Так как искомая плоскость проходит через точку M_0, то запишем её уравнение в виде

$$A(x-1) + B(y+2) + C(z-4) = 0.$$

Для определения коэффициентов A, B, C используем условие перпендикулярности искомой плоскости к данным плоскостям, согласно которому за нормальный вектор $\vec{n}(A, B, C)$ можно принять результирующий вектор векторного произведения нормальных векторов $\overrightarrow{n_1}(2, 3, -5)$ и $\overrightarrow{n_1}(3, 4, -3)$ данных плоскостей:

$$\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 9\vec{j} - \vec{k}.$$

Следовательно, уравнение искомой плоскости

$$11(x-1) - 9(y+2) - (z-4) = 0 \text{ или } 11x - 9y - z - 25 = 0.$$

Задача 8. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 2x-3y+z-2=0; \\ 3x-4y-z+1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y-z-3=0; \\ 2x+3y+2z+4=0. \end{cases}$

Решение

Найдем направляющие векторы данных прямых:

$$\overrightarrow{s_1}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}=7\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k};\quad \overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=7\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}.$$

Найдем косинус угла между данными прямыми по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2}\right)}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\left|\overrightarrow{s_2}\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}=$$

$$=\frac{7\cdot7+5(-4)+1(-1)}{\sqrt{49+25+1}\sqrt{49+16+1}}\approx 0,31.$$

Этому значению $\cos\varphi$ соответствует угол $\varphi\approx 71^0 48'$.

Задача 9. Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости *xOy* и проходящей через точку $M_0(2,3,0)$ перпендикулярно к прямой

$$\frac{x+3}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-6}{-1}.$$

Решение

Пусть $\vec{s}(m,n,p)$–направляющий вектор искомой прямой. Пря-мая лежит в плоскости *xOy*, поэтому проекция вектора $\vec{s}$ на ось *Oz* равна нулю, т.е. $p=0$. На основании условия перпендикулярности прямых для определения проекций m и n вектора $\vec{s}$ получим следующее равенство: $5m+2n=0$.

Так как направляющий вектор $\vec{s}$ определяется с точностью до множителя, одну из его координат можно выбрать произвольно. Например, положив, что $n=-5$, получим $m=2$, следовательно, $\vec{s}(2,-5,0)$. Искомая прямая, кроме того, проходит через точку $M_0(2,3,0)$, поэтому её канонические уравнения

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z}{0}.$$

Задача 10. Найти проекцию B точки $A(3,-2,4)$ на плоскость α: $2x+y+3z+12=0$.

Решение

Точка B есть пересечение плоскости α с перпендикуляром, проведенным через точку A к этой плоскости. Поэтому на основании перпендикулярности прямой и плоскости составим канонические уравнения перпендикуляра (прямой AB): $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$.

Теперь приведем уравнения прямой к параметрическому виду, приравняв к t каждое из трех данных отношений: $x=3+2t,\ \ y=-2+t,\ \ z=4+3t.$ Подставим эти значения x,y,z в уравнение данной плоскости

$$2(3+2t)+(-2+t)+3(4+3t)+12=0,$$

откуда получим $t=-2$ – значение параметра, отвечающее точке B как точке пересечения прямой AB с данной плоскостью. Следовательно, $x_B=3+2(-2)=-1$; $y_B=-2-2=-4$; $z_B=4+3(-2)=-2$, т. е. $B(-1,-4,-2)$.

Задача 11. Доказать, что прямые $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-7}{4}$; $\dfrac{x-9}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$ скрещиваются и найти кратчайшее расстояние между ними.

Решение

Точка $M_1(1,-4,7)$ лежит на первой прямой, а точка $M_2(9,-3,4)$ лежит на второй прямой. Найдем смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}(8,1,-3)$, $\overrightarrow{s_1}(5,-3,4)$, $\overrightarrow{s_2}(2,-1,2)$:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2}\right)=\begin{vmatrix}8 & 1 & -3\\ 5 & -3 & 4\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=8(-2)-1\cdot 2-3\cdot 1=-21.$$

Так как смешанное произведение отлично от нуля, то данные прямые скрещиваются.

Найдем векторное произведение: $\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -3 & 4\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$,

поэтому $\left|\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}=3$.

Следовательно, искомое расстояние $d = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right)\right|}{\left|\left[\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right]\right|} = \dfrac{|-21|}{3} = 7$.

Задача 12. Показать, что прямые $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{2}$; $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-6}{1}$ пересекаются и найти точку их пересечения.

Решение

Направляющие векторы прямых $\overrightarrow{s_1}(2,3,2)$, $\overrightarrow{s_2}(3,2,1)$. Точка $M_1(2,-1,3)$ лежит на первой прямой, точка $M_2(7,4,6)$ лежит на второй прямой. Найдем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(5,5,3)$. Тогда смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}(5,5,3)$, $\overrightarrow{s_1}(2,3,2)$, $\overrightarrow{s_2}(3,2,1)$ имеет вид:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right) = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5(-1) - 5(-4) + 3(-5) = 0.$$

Поскольку векторы $\overrightarrow{s_1}$ и $\overrightarrow{s_2}$ неколлинеарны (их координаты непропорциональны) и смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{s_1}$, $\overrightarrow{s_2}$ равно нулю, то данные прямые пересекаются.

Точку пересечения прямых можно найти, например, так: привести уравнение одной из прямых к параметрическому виду и из уравнений второй прямой найти значение параметра *t*, соответствующее точке пересечения.

В данном примере параметрические уравнения второй прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 7 + 3t; \\ y = 4 + 2t; \\ z = 6 + t. \end{cases}$$

Подставив эти выражения для x, y, z в уравнения первой прямой, получим

$$\frac{5+3t}{2} = \frac{5+2t}{3} = \frac{3+t}{2},$$

откуда $t = -1$. Следовательно, точка пересечения прямых имеет координаты: $x = 7 + 3(-1) = 4$, $y = 4 + 2(-1) = 2$, $z = 6 - 1 = 5$.

Задача 13. Эллипс касается оси ординат в начале координат, а центр симметрии его находится в точке $(5,0)$. Составить уравнение эллипса, если его эксцентриситет равен 0,6.

Решение

Выполним чертеж (рисунок 3).

Каноническое уравнение такого эллипса

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

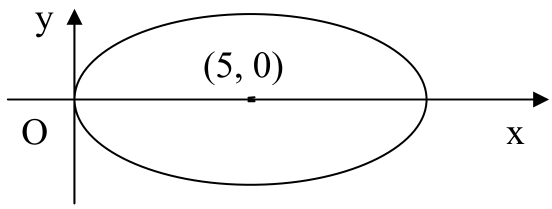

Рисунок 3

В нашем случае

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-0)^2}{b^2}=1.$$

Известно, что $b^2=a^2-c^2$. Следовательно, для нахождения b надо знать c. Найдём c из формулы эксцентриситета: $\varepsilon=c/a$, 0,6=$c/5$, откуда $c=3$. Значит, $b^2=25-9=16$, $b=4$.

Итак, уравнение искомого эллипса

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Задача 14. Дана равносторонняя гипербола $x^2-y^2=2$. Найти уравнение эллипса, фокусы которого находятся в фокусах гиперболы, если известно, что эллипс проходит через точку $M_0(2,3)$.

Решение

Для данной гиперболы $a^2=b^2=2$. Следовательно, из соотношения $b^2=c^2-a^2$ получаем $c^2=a^2+b^2=4$, откуда $c=2$. Значит фокусы гиперболы $F_1(-2,0)$ и $F_2(2,0)$. В этих точках находятся фокусы эллипса.

Обозначим через a_1 и b_1 соответственно большую и малую полуоси эллипса. Тогда при условии, что $c=2$, будем иметь $4=a_1^2-b_1^2$. Для определения a_1 и b_1 используем еще одно условие: точка $M_0(2,3)$ лежит на эллипсе, т. е. ее координаты должны удовлетворять уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1. \tag{5}$$

Это значит, что $\dfrac{4}{a_1^2}+\dfrac{9}{b_1^2}=1$. Таким образом, для определения a_1^2 и b_1^2 имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1^2 - b_1^2 = 4; \\ \dfrac{4}{a_1^2}+\dfrac{9}{b_1^2}=1, \end{cases}$$

решив которую, получим $a_1^2 = 16$, $b_1^2 = 12$. Подставив эти значения в уравнение (5), найдем

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

Задача 15. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $3x \pm 4y = 0$, а фокусы лежат на оси *Oy* и расстояние между ними равно 20. Написать каноническое уравнение гиперболы и начертить ее.

Решение

Так как фокусы гиперболы лежат на оси *Oy*, то ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1.$$

Разрешив уравнение асимптот относительно *x*, получим $x=\pm\dfrac{4}{3}y$, откуда $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$. Кроме того, $F_1F_2 = 2c = 20$, т. е. $c = 10$. Так как для гиперболы $c^2 = a^2 + b^2$, то для нахождения *a* и *b* получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}; \\ a^2+b^2=100, \end{cases}$$

решив которую, будем иметь $a = 6$, $b = 8$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=-1.$$

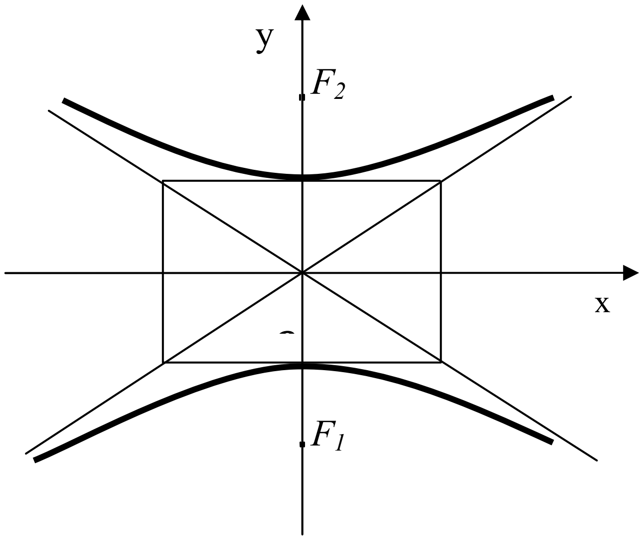

Рисунок 4

Задача 16. Составить уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 - 4x = 0$ и симметрична относительно оси *Oy*.

Решение

Найдем точки пересечения заданных линий, решив совместно их уравнения:

$$\begin{cases} x + y = 0; \\ x^2 + y^2 - 4x = 0. \end{cases}$$

В результате получим $(x_1 = 0,\ y_1 = 0)$, $(x_2 = 2,\ y_2 = -2)$. Точки пересечения $O(0,0)$ и $A(2,-2)$. Так как парабола проходит через точку $O(0,0)$ и симметрична относительно оси *Oy*, то в этой точке будет находиться вершина параболы. Поэтому уравнение параболы имеет вид: $x^2 = 2py$. Так как парабола проходит через точку $A(2,-2)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению параболы: $2^2 = 2p(-2),\ -2p = 2,\quad p = -1.$

Итак, уравнение параболы будет $x^2 = -2y$, уравнение директрисы $y = -\frac{p}{2}$ или $y = 1/2$, откуда $2y - 1 = 0.$

Задача 17. Какую поверхность определяет уравнение

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 8y + 18z - 54 = 0?$$

Решение

Чтобы привести данное уравнение к каноническому виду, выделим полные квадраты переменных x, y, z:

$$\left(x^2 + 2x + 1\right) + 2\left(y^2 + 4y + 4\right) - 3\left(z^2 - 6z + 9\right) - 36 = 0;$$

$$(x+1)^2+2(y+2)^2-3(z-3)^2=36.$$

Отсюда

$$\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{18}-\frac{(z-3)^2}{12}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с табличными, видим, что это уравнение однополостного гиперболоида, центр которого смещен в точку $(-1,-2,3)$. Путем параллельного переноса прямоугольной системы координат по формулам

$$\begin{cases} x=X-1; \\ y=Y-2; \\ x=Z+3 \end{cases}$$

приведем уравнение к каноническому виду:

$$\frac{X^2}{36}+\frac{Y^2}{18}-\frac{Z^2}{12}=1.$$

2 Задачи и упражнения для решения

2.1 Прямая на плоскости

1 Записать уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0;y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}$ =(A,B), если:

а) $M_0(1;2)$, $\vec{n}$ =(3,-4);

б) $M_0(1;-1)$, $\vec{n}$ =(2,-3).

2 Записать уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0;y_0)$ и направляющим вектором $\vec{s}$ =(l,m), если:

а) $M_0(-2;2)$, $\vec{s}$ =(-1,1);

б) $M_0(-1;4)$, $\vec{s}$ =(2,1).

3 Записать уравнение прямой, заданной двумя точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, если:

а) $M_1(3;-1)$ и $M_2(2;5)$;

б) $M_1(4;0)$ и $M_2(-1;2)$.

4 Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$:

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно к данной прямой;

в) под углом 45° к данной прямой.

5 Вычислить угол между данными прямыми:

а) $x+5y-3=0$, $2x-3y+4=0$;

б) $x+2y-3=0$, $2x+4y+5=0$;

в) $3x+5y+1=0$, $5x-3y-2=0$.

6 Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x-4y+5=0$, $4x+3y-7=0$ и одна из его вершин $A(-2;1)$. Записать уравнения двух других сторон прямоугольника.

7 Найти расстояние d от точки до прямой:

а) $A(2;-1)$, $4x+3y+10=0$;

б) $A(0;-3)$, $5x-12y-23=0$.

8 Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ и одна из его вершин $A(-2;1)$. Вычислить площадь этого прямоугольника.

9 Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$. Вычислить его площадь.

10 Найти проекцию точки $A(-8;12)$ на прямую, проходящую через точки $M_1(2;-3)$ и $M_2(-5;1)$.

11* Даны две вершины треугольника $A_1(-6;2)$, $A_2(2;-2)$ и точка $N(1;2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины A_3 и уравнение высоты A_3N .

12 Известны вершины треугольника $A(4,6)$, $B(-4,0)$, $C(-1,-4)$. Требуется:

а) записать уравнения сторон треугольника;

б) записать уравнение высоты AD ;

в) записать уравнение медианы CF ;

г) записать уравнение биссектрисы угла B ;

д) построить в декартовой системе координат треугольник ABC , высоту AD , медиану CF , биссектрису BK .

13 Составить уравнения биссектрис углов между указанными прямыми:

а) $3x-4y+2=0$, $5x+12y-3=0$;

б) $3x-y+5=0$, $3x+y-4=0$.

14 Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(4,4)$, $B(-6,-1)$, $C(-2,-4)$. Требуется записать уравнения биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине C и медианы, проведенной из этой вершины.

15 Составить уравнение сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(3;-4)$ и уравнения двух его высот $7x-2y-1=0$, $2x-7y-6=0$.

16 Доказать, что точки $(-2,3)$, $(1,7)$, $(2,3)$ и $(-4,-5)$ являются вершинами трапеции. Найти уравнение средней линии трапеции и угол, заключенный между диагоналями.

17 Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $11x+3y-7=0$ и $12x+y-19=0$ и равноудаленной от точек $A(3;-2)$ и $B(-1;6)$.

18* Составить уравнение прямой, симметричной прямой $3x-2y+1=0$ относительно точки $M(5;1)$.

19* Составить уравнения сторон квадрата, если в прямоугольной системе координат даны одна из его вершин $A(2;-4)$ и точка пересечения его диагоналей $K(5;2)$.

20* Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $7x-y-9=0$, $x+y-5=0$ и точка $M(3;-8)$, лежащая на его основании. Записать уравнение основания треугольника.

2.2 Плоскость

1 Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;-7)$ параллельно плоскости $2x-6y-3z+5=0$.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;5)$ перпендикулярно линии пересечения плоскостей $2x+y-2z+1=0$ и $x+y+z-5=0$.

3 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4;-3;2)$ и прямую $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-1}$.

4 Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;3;-1)$ и $M_2(1;5;3)$ перпендикулярно плоскости $3x-y+3z+15=0$.

5 Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;2;-3)$ параллельно прямым $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$ и $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

6 Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к прямой $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}$.

7 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;5;-7)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

8 Записать уравнение плоскости, проходящей через точку

$M_0(2;-1;4)$ и отсекающей на оси Oz отрезок, вдвое больший, чем на осях Ox и Oy .

9 Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $A(3;5;1)$, $B(7;7;8)$ и отсекающей на осях Ox и Oy равные отрезки.

10 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой пересечения плоскости $x-2y+4z-3=0$ с плоскостью Oxz .

11 Определить двугранный угол, образованный данными плоскостями: $6x+3y-2z=0$ и $x+2y+6z-12=0$.

12 Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки:

а) $M_1(2;3;1)$,$M_2(3;1;4)$,$M_3(2;1;5)$;

б) $M_1(2;0;-1)$,$M_2(-2;4;1)$,$M_3(0;2;-1)$.

13 Определить расстояния от точек $A(3;5;1)$, $B(7;-1;2)$, $C(2;0;4)$ до плоскости $x+2y-2z+5=0$

14 Найти расстояние d от точки $M(-1;1;-2)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

15 Составить уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляры, опущенные из точки $A\left(2,0,4\right)$ на плоскости $x-7y+2z=0$ и $5x+3y-z=0$.

16 Найти косинусы углов между двумя плоскостями:

а) $2x-y+3z=0$, $x+4y-6z=0$;

б) $x+3y-4z+5=0$, $2x+2y+2z-7=0$.

17* Вычислить угол между плоскостями, проходящими через точку $M_1(1;-1;1)$, одна из которых содержит ось Ox , а другая – ось Oz .

18* Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки $\left(1;3;5\right)$ на прямую, по которой пересекаются плоскости $2x+y+z-1=0$, $3x+y+2z-3=0$.

19* Определить объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $2x+3y+6z-18=0$.

20* Вычислить косинусы внутренних двугранных углов тетраэдра, образованного плоскостями координат и плоскостью $2x+3y+6z-12=0$.

21* Даны уравнения трех граней параллелепипеда $2x+3y+4z-12=0$, $x+3y-6=0$, $z+5=0$ и одна из его вершин $(6;-5;1)$. Составить уравнения трех других граней параллелепипеда.

2.3 Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости

1 Составить канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями:

1) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y-9z-2=0, \\ x+y-3z-1=0. \end{cases}$

2 Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;3;-5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

3 Записать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;0;3)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-4}{-2}$ и расположенной в плоскости xOz .

4 Доказать параллельность прямых $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+7}{1}$ и $\begin{cases} x-y-3z-2=0, \\ x+3y+z+2=0. \end{cases}$

5 Доказать перпендикулярность прямых $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-6}$ и $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$

6 Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-2}$ и $\frac{x+1}{1}=\frac{y+11}{2}=\frac{z+6}{1}$ пересекаются. Найти их точку пересечения.

7 Доказать, что прямые $\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x \quad -3z=0, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ скрещиваются.

8 Показать, что прямая $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ лежит в плоскости $x+2y-4z+1=0$.

9 Найти проекцию точки $M(1;2;1)$ на прямую $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

10 Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ и

$\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$ лежат в одной плоскости. Составить уравнение этой плоскости.

11 Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(3,-2,0)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ и расположенной в плоскости xOy.

12 Найти угол между указанными прямыми:

а) $l_1:\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, $l_2:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$;

б) $l_1:\begin{cases}3x-4y-2z=0,\\ 2x+y-2z+1=0,\end{cases}$ $l_2:\begin{cases}4x+y-6z-2=0,\\ y-3z-2=0.\end{cases}$

13 Вычислить синус угла между прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{12}=\frac{z-1}{-3}$ и плоскостью $6x-3y+2z=0$.

14* Из всех прямых, пересекающих две прямые $\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}$, найти ту, которая была бы параллельна прямой. $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}$.

15* Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(3;-2;4)$ на плоскость $5x+3y-7z+1=0$.

16 Составить канонические уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую, если:

а) $M(5;3;1)$, $l:\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$;

б) $O(0;0;0)$, $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$.

17* Найти уравнение плоскости, проектирующей прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ на плоскость $x+4y-3z+7=0$.

18 Найти расстояние между двумя параллельными прямыми:

а) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$, $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$;

б) $\begin{cases} 4x+2y+3z+1=0, \\ 9x+5y+2z+9=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+y+7z-2=0, \\ x+y-4z+3=0. \end{cases}$

19* Найти канонические уравнения проекции прямой на $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ плоскость $x-y+3z+8=0$.

20* Записать уравнения проекции прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$ на плоскость Oyz .

2.4 Кривые второго порядка

1 Записать уравнение окружности, если концы одного из ее диаметров имеют координаты (3,9) и (7,3).

2 Записать уравнение окружности, проходящей через три данные точки:

а) $M_1(9,3)$, $M_2(-3,3)$, $M_3(11,1)$;

б) $M_1(4,5)$, $M_2(-4,-1)$, $M_3(0,1)$.

3* Составить уравнение окружности, касающейся прямой $x-7y+10=0$ в точке $N(4,2)$, если известно, что ее центр лежит на прямой $2x+y=0$.

4 Привести к каноническому виду уравнение окружности:

а) $x^2+y^2-2x+4y=0$;

б) $3x^2+3y^2-2x+7y+1=0$.

5 Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что:

а) большая ось равна 10, а расстояние между фокусами равно 8;

б) малая полуось равна 6, эксцентриситет равен 0,8;

в) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен 0,6;

г) сумма полуосей равна 10, расстояние между фокусами равно $4\sqrt{5}$.

6 Определить эксцентриситет эллипса, если известно, что:

а) расстояние между его фокусами равно расстоянию между вершинами большой и малой полуосей;

б) большая ось втрое больше малой.

7 Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, если:

а) большая ось равна 10, расстояние между фокусами равно 8;

б) малая ось равна 16, эксцентриситет равен 0,6.

8 Оси эллипса совпадают с осями координат. Эллипс проходит через точки $M_1(2,2)$, $M_2(3,1)$. Составить уравнение эллипса.

9 Эллипс касается оси абсцисс в точке (8,0) и оси ординат в точке

(0,-5). Записать уравнение эллипса, если известно, что его оси параллельны осям координат.

10 Прямые $x = \pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.

11 Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если:

а) расстояние между фокусами равно 14, действительная ось равна 12;

б) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен 3/2;

в) расстояние между фокусами равно 20, уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{4x}{3}$;

г)* расстояние между директрисами равно 32/5 и мнимая ось равна 6.

12 Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

а) действительная ось равна 48, эксцентриситет равен 13/12;

б) гипербола проходит через точку $M(10, -3\sqrt{3}\,)$, асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\dfrac{3x}{5}$;

в) даны точки $M_1(-8, 2\sqrt{2})$ и $M_2(6, -1)$ гиперболы.

13* Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

14 Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

а) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку $A(-2, 4)$;

б) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку $B(3, -9)$.

15 На параболе $y^2 = 16x$ найти точки, фокальный радиус-вектор которых равен 13.

16 Арка моста имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота равна 6 м.

17* Определить общие касательные к параболе $y^2 = 4x$ и к эллипсу $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

18 Привести к каноническому виду уравнение линии, определить ее

тип. Выполнить чертеж:

а) $y = 4x^2 - 8x + 7$;

б) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$;

в) $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24$;

г) $x - 2y^2 + 12y - 14 = 0$;

д) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$;

е) $2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 1 = 0$.

19* Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от точки $A(2;0)$ и от прямой $y = 5x + 8$ относятся как $5:4$.

20* Составить уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точку пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 - 4x = 0$ и симметрична относительно оси Oy .

2.5 Цилиндрические поверхности, поверхности вращения, поверхности второго порядка

1 Определить, какую поверхность определяет уравнение:

а) $x^2 + y^2 = 2ax$; г) $y^2 = 4z$; ж) $x^2 = 2az$;

б) $y^2 + z^2 = 4$; д) $xz = 4$; з) $x^2 + y^2 = 2ay$.

в) $y^2 = ax$; е) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$;

Построить данные поверхности.

2 Линия задана уравнением $\begin{cases} z = x^2; \\ y = 0. \end{cases}$ Написать уравнения поверхности, полученной в результате вращения вокруг оси:

а) Ox ; б) Oz .

3* Линия задана уравнением:

а) $\begin{cases} z = e^{-x^2}; \\ y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} z = \dfrac{4}{x^2}; \\ y = 0. \end{cases}$

Написать уравнения поверхностей вращения, полученных в результате вращения указанных кривых вокруг оси Oz .

4 Назвать и построить поверхность:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 22 = 0$.

5 Найти точки пересечения поверхности и прямой:

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$;

б) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=-1$ и $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{3}$;

в) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ и $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$.

6* Составить уравнение касательной плоскости к сфере $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$ в точке $M(7;-1;5)$.

7* Исследовать методом сечений и построить данные поверхности:

а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$; г) $-x^2+y^2+z^2=-9$;

б) $x^2+y^2-z^2=4$; д) $y^2=x^2+z^2$;

в) $2z=x^2+\frac{y^2}{2}$; е) $z=2+x^2+y^2$.

8* Построить тело, ограниченное поверхностями:

а) $z=x^2+y^2$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

б) $x^2+y^2-z^2=0$ $(z\ge 0)$, $z=6-x^2-y^2$.

3 Варианты контрольных заданий

Вариант 1

1 Написать уравнение линии центров двух окружностей $x^2+y^2-6x+8y=0$ и $x^2+y^2-12y+11=0$. Выполнить чертеж.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1=(3;1;-1)$ и $\vec{a}_2=(1;-2;1)$.

3 Доказать, что прямые $\frac{x+3}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\begin{cases} x+y-z+4=0, \\ 2x-3y-z-5=0 \end{cases}$ пересекаются.

4 С помощью метода выделения полного квадрата привести уравнение линии 2-го порядка к каноническому виду и определить ее тип: $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$. Выполнить чертеж.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $x^2+y^2=4z$. Выполнить чертеж.

Вариант 2

1 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-15;1)$ и $M_2(3;1;2)$ перпендикулярно к плоскости $3x-y-4z=0$.

2 Найти проекцию B точки $A(4;3;10)$ на прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

3 С помощью метода выделения полного квадрата привести уравнение линии 2-го порядка к каноническому виду и определить ее тип: $-x^2+y^2+2x-6y=0$. Выполнить чертеж.

4 Дано уравнение эллипса $25x^2+169y^2=4225$. Вычислить длину осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса, построить его.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $x^2-y^2+z^2+4=0$. Выполнить чертеж.

Вариант 3

1 Найти канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;-3;5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

2 Найти проекцию B точки $A(5;2;-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

3 С помощью метода выделения полного квадрата привести уравнение линии 2-го порядка к каноническому виду и определить ее тип: $9x^2+4y^2-54x+32y+109=0$. Выполнить чертеж.

4 Определить точки пересечения гиперболы $-\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ и параболы $y^2=3x$. Выполнить чертеж.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $4x^2+9y^2+36z^2-36=0$. Выполнить чертеж.

Вариант 4

1 Найти точку A_1, симметричную точке $A(5;10;4)$ относительно прямой

$$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2+4t, \\ z=3+5t. \end{cases}$$

2 Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что $A(0;-2)$ и $B\left(\frac{\sqrt{15}}{2};1\right)$ – точки, лежащие на кривой. Выполнить чертеж.

3 Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что директриса параболы задана уравнением $y=5$. Построить параболу.

4 Через точку $A(2;-5)$ провести прямые, параллельные асимптотам гиперболы $x^2-4y^2=4$. Выполнить чертеж.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $9x^2-4y^2+36x-8y+z^2-4=0$. Выполнить чертеж.

Вариант 5

1 Доказать, что прямые $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\ 2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ взаимно-перпендикулярны.

2 Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 1,25. Найти уравнения асимптот и директрис гиперболы. Построить гиперболу.

3 Найти точки пересечения поверхности $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ и прямой $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$.

4 Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-1;1)$ перпендикулярно плоскостям $2x-z+1=0$ и $y=0$.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $4x^2+y^2-24x-4y-z^2+2z+35=0$. Выполнить чертеж.

Вариант 6

1 Найти точку, симметричную точке $M(2;7;1)$ относительно плоскости $x-4y+z+7=0$.

2 Составить уравнения гиперболы, если даны точка $M_1\left(\frac{9}{2};-1\right)$ гиперболы и уравнения асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$. Фокусы гиперболы лежат на оси абсцисс. Выполнить чертеж.

3 Составить канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями: $\begin{cases}2x-3y-3z-9=0,\\ x-2y+z+3=0.\end{cases}$

4 Сфера проходит через точку $M(4;2;2)$ и имеет центр в точке $C(1;-1;-1)$. Составить ее уравнение и выполнить чертеж.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $x^2+2y^2+3z^2+6x-4y-12z-1=0$. Выполнить чертеж.

Вариант 7

1 Даны вершины треугольника ABC : $A(1;0)$, $B(-1;4)$, $C(9;5)$. Найти уравнение стороны AB , уравнение высоты CH , уравнение медианы AM , точку N пересечения медианы AM и высоты CH , уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно стороне AB .

2 Определить угол между прямыми $\begin{cases} 3x-4y-2z\ \ =0, \\ 2x+y-2z+1=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x+y-6z-2=0, \\ \quad y-3z-2=0. \end{cases}$

3 Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс, если даны точка $M_1(9;8)$ гиперболы и уравнения асимптот $y=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Найти эксцентриситет и уравнения директрис. Построить гиперболу.

4 С помощью метода выделения полного квадрата привести уравнение линии 2-го порядка к каноническому виду и определить ее тип: $y^2+4x+2y-11=0$. Выполнить чертеж.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $y^2=x^2+z^2$. Выполнить чертеж.

Вариант 8

1 Найти высоту пирамиды $SABC$, опущенную из вершины S на грань ABC , если $S(1;4;-2)$, $A(0;-1;1)$, $B(3;5;1)$, $C(1;-3;-1)$.

2 Доказать, что прямые взаимно-перпендикулярны $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0. \end{cases}$

3 Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если дана точка $M_1(2,-2)$ эллипса, а его большая полуось равна 4.

4 С помощью метода выделения полного квадрата привести уравнение линии 2-го порядка к каноническому виду и определить ее тип: $3x^2-4y^2-12x+24=0$. Выполнить чертеж.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $x^2-y^2-z^2-4=0$. Выполнить чертеж.

Ответы

2.1 Прямая на плоскости

1. *а)* $3x-4y+5=0$; *б)* $2x-3y-5=0$. ***2.*** *а)* $x+y=0$, *б)* $x-2y+9=0$. ***3.*** *а)* $6x+y-17=0$, *б)* $2x+5y-8=0$. ***4.*** *а)* $2x+3y-7=0$, *б)* $3x-2y-4=0$, *в)* $x-5y+3=0$, $5x+y-11=0$. ***5.*** *а)* 45°, *б)* 0°, *в)* 90°. ***6.*** $3x-4y+10=0$, $4x+3y+5=0$. ***7.*** *а)* 3, *б)* *1*. ***8.*** 6. ***9.*** 49. ***10.*** $(-12{,}5)$. ***11.*** $A_3(2{,}4)$, $2x-y=0$. ***12.*** *а)* $-3x+4y-12=0$, $2x-y-2=0$, $4x+3y+16=0$, *б)* $3x-4y+12=0$, *в)* $7x-y+3=0$, *г)* $x+7y+4=0$. ***13.*** *а)* $64x+8y+11=0$, $14x-112y+41=0$, *б)* $6x+1=0$, $2y-9=0$. ***14.*** $7x+y+18=0$, $11x-2y+14=0$. ***15.*** $2x+7y+22=0$, $7x+2y-13=0$, $x-y+2=0$. ***16.*** $4x-3y+9=0$, $\cos\varphi=-\dfrac{5}{13}$. ***17.*** $7x+y-9=0$, $2x+y+1=0$. ***18.*** $3x-2y-27=0$, ***19.*** $x-3y+16=0$, $x-3y-14=0$, $3x+y-32=0$, $3x+y-2=0$. ***20.*** $3x+y-1=0$, $x-3y-27=0$.

2.2 Плоскость

1. $2x-6y-3z-43=0$. ***2.*** $3x-4y+z-23=0$. ***3.*** $9x+8y-6z=0$. ***4.*** $2x+3y-z-14=0$. ***5.*** $9x+11y+5z-16=0$. ***6.*** $4x+5y-2z=0$. ***7.*** $x+y+z-1=0$. ***8.*** $2x+2y+z-6=0$. ***9.*** $7x+7y-6z-50=0$. ***10.*** $4x-z=0$. ***11.*** $\dfrac{\pi}{2}$. ***12.*** *а)* $x+2y+z-9=0$, *б)* $x+y-2=0$. ***13.*** $\dfrac{16}{3};2;\dfrac{1}{3}$. ***14.*** 4. ***15.*** $x+11y+38z-154=0$. ***16.*** *а)* $\pm\dfrac{20}{\sqrt{14}\sqrt{53}}$, *б) плоскости взаимно-перпендикулярны.* ***17.*** 60^0. ***18.*** $(-2{,}1{,}4)$. ***19.*** 27. ***20.*** $\dfrac{2}{7};\dfrac{3}{7};\dfrac{6}{7}$. ***21.*** $2x+3y+4z-1=0$, $x+3y+9=0$, $z-1=0$.

2.3 Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. *а)* $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$, *б)* $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$. ***2.*** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+5}{-5}$. ***3.*** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-3}{1}$. ***6.*** $(3,-3,-2)$. ***9.*** $\left(-\dfrac{5}{13};-\dfrac{7}{13};\dfrac{27}{13}\right)$. ***10.*** $2x-16y-13z+31=0$. ***11.*** $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{0}$. ***12.*** *а)* 60^0, *б)* $\cos\varphi=\dfrac{98}{195}$, $\phi=59^0 48'$. ***13.*** $\sin\varphi=\dfrac{18}{91}$. ***14.*** $\dfrac{x}{8}=\dfrac{y+8}{7}=\dfrac{z+9}{1}$. ***15.*** $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-4}{-7}$. ***16.*** *а)* $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$, *б)* $\dfrac{x}{33}=\dfrac{y}{-26}=\dfrac{z}{27}$. ***17.*** $-11x+17y+19z-10=0$. ***18.*** *а)* $\sqrt{\dfrac{10}{3}}$, *б)* $\dfrac{4\sqrt{29}}{9\sqrt{6}}$. ***19.*** $\dfrac{x-0{,}8}{7}=\dfrac{y-4{,}6}{4}=\dfrac{z+1{,}4}{-1}$. ***20.*** $y-3z+5=0$, $x=0$.

2.4 Кривые второго порядка

1. $(x-5)^2+(y-6)^2=13$. ***2.*** *а)* $(x-3)^2+(y+5)^2=100$, *б)* $(x+9)^2+$ $+(y-14)^2=250$. ***3.*** $(x-6)^2+(y+12)^2=200$. ***4.*** *а)* $(x-1)^2+(y+2)^2=5$, *б)* $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{7}{6}\right)^2=\frac{41}{36}$. ***5.*** *а)* $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, *б)* $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, *в)* $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, *г)* $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$. ***6.*** *а)* $\sqrt{0{,}4}$, *б)* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ***7.*** *а)* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, *б)* $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. ***8.*** $\frac{3x^2}{32}+\frac{5y^2}{32}=1$. ***9.*** $\frac{(x-8)^2}{64}+\frac{(y+5)^2}{25}=1$. ***10.*** $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$. ***11.*** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$, *б)* $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, *в)* $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$, *г)* $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. ***12.*** *а)* $\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{100}=1$, *б)* $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$, *в)* $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$. ***13.*** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. ***14.*** *а)* $y^2=-8x$, *б)* $y=-x^2$. ***15.*** $(9{,}12)$, $(9{,}-12)$. ***16.*** *12*. ***17.*** $x\pm 2y+4=0$. ***18.*** *а)* $(x-1)^2=\frac{1}{4}(y-3)$, *б)* $\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$, *в)* $\frac{(x+4)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{1}=1$, *г)* $(y-3)^2=\frac{1}{2}(x+4)$, *д)* $-\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$, *е)* $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$. ***19.*** $\frac{(x+8)^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. ***20.*** $y=\frac{1}{2}$.

2.5 Цилиндрические поверхности, поверхности вращения, второго порядка

4. *а)* $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{25}{2}$, *сфера; б)* $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=$ $=36$*, сфера.* ***5.*** *а)* $(4,-3,2)$, *б)* $(4,2,9)$, *в)* $(3,4,-2)$, $(6,-2,2)$. ***6.*** $6x+2y+3z-55=0$.

Список литературы

1 **Гурский, Е. И.** Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е. И. Гурский. – Минск : Выш. шк., 1982. – 272 с.

2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление одной переменной / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1992. – 384 с.

3 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – Минск : Выш. шк., 1973. – 575 с.

4 Руководство к решению задач по высшей математике / Под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 1. – 350 с.

5 **Сухая, Т. А.** Задачи по высшей математике / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Выш. шк., 1993. – Ч. 1. – 416 с.