ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты индивидуальных заданий для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Могилев 2013

УДК 51
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «13» ноября 2012 г., протокол №3.

Составители: Л. В. Варфоломеева; Т. Ю. Орлова;
С. Ф. Плешкунова; С. А. Скрыган

Рецензент С. К. Крутолевич

Изложены краткие теоретические сведения по теме « Интегральное исчисление функции нескольких переменных», приведены варианты заданий для самостоятельного решения.

Предназначается для студентов всех специальностей.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск Л. В. Плетнев

Технический редактор А. Т. Червинская

Компьютерная верстка А. Н. Скобова

Подписано в печать 13.03.2013. Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. – печ. л. 2,55. Уч.-изд. л. 2,4.Тираж 56 экз. Заказ № 200.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/0548519 от 16.06.2009.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилёв.

Содержание

1 Краткие теоретические сведения по теме «Интегральное исчисление функции нескольких переменных»

1.1 Двойной интеграл

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах сводится к вычислению повторного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy,$$

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\right\};$$

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx,$$

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| c\le y\le d, \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\right\}.$$

Переход к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$ в двойном интеграле осуществляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

1.1.1 Приложения двойного интеграла.

Площадь плоской фигуры

$$S=\iint\limits_D dxdy.$$

Объём криволинейного цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x;y)$, снизу – плоскостью $z=0$, сбоку – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси *Oz*, а направляющей служит контур области *D*

$$V=\iint\limits_D f(x;y)dxdy.$$

Площадь поверхности, заданной уравнением $z=f(x;y)$**,**

$$Q=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Площадь поверхности, заданной уравнением $F(x;y;z)=0$**,**

$$S=\iint_D \frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}}{\left|F'_z\right|}dxdy.$$

Пусть $\mu(x;y)$ – поверхностная плотность пластины.

Масса плоской фигуры

$$m=\iint_D \mu(x;y)dxdy\,.$$

Статические моменты относительно координатных осей

$$M_x=\iint_D y\mu(x;y)dxdy\,;\; M_y=\iint_D x\mu(x;y)dxdy\,.$$

Координаты центра масс

$$x_0=\frac{M_y}{m};\; y_0=\frac{M_x}{m}.$$

Моменты инерции относительно координатных осей и начала координат

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x;y)dxdy\,;\; I_y=\iint_D x^2\mu(x;y)dxdy\,;$$

$$I_0=\iint_D \left(x^2+y^2\right)\mu(x;y)dxdy\,.$$

В случае однородной пластины $\mu\left(x;y\right)=\mathrm{const}$.

1.2 Тройной интеграл

Вычисление тройных интегралов по области $V=\left\{\left(x;y;z\right)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,a\le x\le b,\; y_1\left(x\right)\le y\le y_2\left(x\right),\; z_1\left(x;y\right)\le z\le z_2\left(x;y\right)\right\}$:

$$\iiint_V f(x;y;z)dxdydz=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)}f(x;y;z)dz\,.$$

При переходе от ***декартовых координат*** $\left(x,y,z\right)$ ***к цилиндрическим***

(ρ, φ, z), связанных с (x, y, z) формулами $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$ $(0 \le \rho < +\infty,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi$ или $-\pi \le \varphi \le \pi$) (рисунок 1), вычисление интеграла осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z\right)\rho d\varphi d\rho dz.$$

Переход к ***сферическим координатам*** $x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ $(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi)$ (рисунок 2) в тройном интеграле осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f\left(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi\right)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta.$$

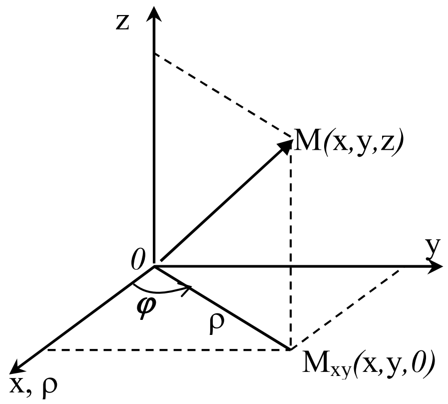

Рисунок 1

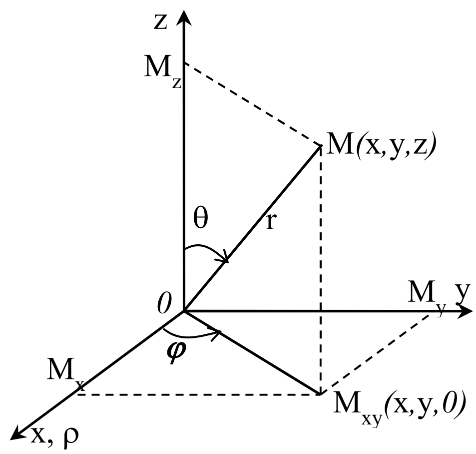

Рисунок 2

1.2.1 Приложения тройного интеграла.

Вычисление объёма замкнутой области V **:**

$$V = \iiint\limits_V dxdydz.$$

Вычисление массы тела, занимающего область V **:**

$$m = \iiint\limits_V \mu\left(x, y, z\right)dxdydz,$$

где $\mu\left(x, y, z\right)$ – объёмная плотность тела V.

Если тело V однородное, то $\mu\left(x, y, z\right) = \text{const}$.

Вычисление статических моментов тела, занимающего область V:

- статический момент тела V относительно плоскости yOz

$$M_{yz} = \iiint\limits_V \mu\left(x, y, z\right) \cdot x \cdot dxdydz\,;$$

- статический момент тела V относительно плоскости xOz

$$M_{xz} = \iiint\limits_V \mu\left(x, y, z\right) \cdot y \cdot dxdydz\,;$$

- статический момент тела V относительно плоскости xOy

$$M_{xy} = \iiint\limits_V \mu\left(x, y, z\right) \cdot z \cdot dxdydz\,.$$

Вычисление координат центра масс тела, занимающего область V ***(центра тяжести)*:**

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_0 = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m},$$

где M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статические моменты тела относительно координатных плоскостей;

m – масса тела V.

Вычисление моментов инерции тела, занимающего область V

- момент инерции тела V относительно оси Ox

$$I_x = \iiint\limits_V \mu\left(x, y, z\right) \cdot \left(y^2 + z^2\right) \cdot dxdydz\,;$$

- момент инерции тела V относительно оси Oy

$$I_y = \iiint\limits_V \mu\left(x, y, z\right) \cdot \left(x^2 + z^2\right) \cdot dxdydz\,;$$

- момент инерции тела V относительно оси Oz

$$I_z = \iiint\limits_V \mu\left(x, y, z\right) \cdot \left(x^2 + y^2\right) \cdot dxdydz\,;$$

- момент инерции тела V относительно плоскости xOy

$$I_{xy}=\iiint\limits_V \mu\left(x,y,z\right)\cdot z^2\cdot dxdydz\,;$$

- момент инерции тела V относительно плоскости yOz

$$I_{yz}=\iiint\limits_V \mu\left(x,y,z\right)\cdot x^2\cdot dxdydz\,;$$

- момент инерции тела V относительно плоскости xOz

$$I_{xz}=\iiint\limits_V \mu\left(x,y,z\right)\cdot y^2\cdot dxdydz\,;$$

- момент инерции тела V относительно начала координат

$$I_O=\iiint\limits_V \mu\left(x,y,z\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot dxdydz.$$

1.3 Криволинейные интегралы

Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги кривой L (криволинейный интеграл 1-го рода (Кри-1)) не зависит от направления пути интегрирования и сводится к вычислению определённого интеграла:

– если кривая L задана уравнением $y=y(x),\ a\le x\le b,$ то

$$\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+\left(y'\left(x\right)\right)^2}dx\,;$$

– если кривая L задана параметрически $x=x(t),\ y=y(t),\ t_1\le t\le t_2,$ то

$$\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)\sqrt{\left(x'\left(t\right)\right)^2+\left(y'\left(t\right)\right)^2}dt$$

;

– если кривая задана уравнением $\rho=\rho\left(\varphi\right),\ \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$ в полярной системе координат, то

$$\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi\right)\sqrt{\rho^2+\left(\rho'\right)^2}d\varphi\,.$$

Криволинейный интеграл по координатам (Кри-2) зависит от направления пути интегрирования

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Вычисление Кри-2 сводится к вычислению определённого интеграла:

– если кривая L задана уравнением $y = f(x),\ a \le x \le b,$ то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x)\right] dx\,;$$

– если кривая L задана уравнением $x = \varphi(y),\ c \le y \le d,$ то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d \left[P(\varphi(y), y)\varphi'(y) + Q(\varphi(y), y)\right] dy\,;$$

– если кривая L задана параметрически $x = x(t),\ y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2,$ то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \left[P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\right] dt\,.$$

Сведение Кри-2 к Кри-1

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L \left[P(x,y)\cos\alpha(x,y) + Q(x,y)\sin\alpha(x,y)\right] dl,$$

где $\alpha(x,y)$ – угол между направлением касательной к кривой L, согласованным с направлением обхода на кривой, и положительным направлением оси Ox.

Формула Грина

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,,$$

где D – односвязная область, ограниченная простой замкнутой непрерывной кривой L, обход по которой совершается против часовой стрелки.

Интеграл по замкнутому контуру в случае $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ равен нулю, т. е.

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

1.3.1 Приложения криволинейных интегралов.

Длина кривой $l = \int\limits_L dl$.

Масса кривой $m = \int\limits_L \mu(x,y,z)\,dl$, где $\mu(x,y,z)$ – плотность кривой.

Координаты центра масс

$$x_0 = \frac{1}{m}\int\limits_L x\mu(x,y,z)\,dl; \quad y_0 = \frac{1}{m}\int\limits_L y\mu(x,y,z)\,dl; \quad z_0 = \frac{1}{m}\int\limits_L z\mu(x,y,z)\,dl.$$

Работа силы $\vec{F} = \left(P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\right)$ вдоль кривой L

$$A = \int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

1.4 Поверхностные интегралы

Поверхностный интеграл 1-го рода (Пови-1) по поверхности S, заданной уравнением $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$, где D – проекция поверхности S на плоскость xOy, осуществляется по одной из формул:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_D f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy;$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_D f\left(x,y,z(x,y)\right)\frac{dxdy}{\left|\cos\gamma(x,y)\right|},$$

где $\gamma(x,y)$ – величина угла между нормалью к поверхности S и положительным направлением оси Oz.

Поверхностный интеграл 2-го рода (Пови-2) по разным сторонам S^+ и S^- одной и той же поверхности S

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{S^-} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy.$$

Сведение Пови-2 к Пови-1:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$=\iint_S \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right)ds,$$

где $\cos\alpha(x,y,z)$, $\cos\beta(x,y,z)$, $\cos\gamma(x,y,z)-$ направляющие косинусы нормали, соответствующей выбранной стороне поверхности S. Если поверхность S задана в неявном виде $F(x,y,z)=0$, то $\cos\alpha=\dfrac{1}{M}F_x'$; $\cos\beta=\dfrac{1}{M}F_y'$; $\cos\gamma=\dfrac{1}{M}F_z'$; $M=\pm\sqrt{\left(F_x'\right)^2+\left(F_y'\right)^2+\left(F_z'\right)^2}$; знак «+» берётся в случае, когда угол $\cos\gamma>0$ (сторона поверхности S^+), а знак «–» – когда $\cos\gamma<0$ (сторона поверхности S^-).

Сведение Пови-2 к двойному интегралу.

Если поверхность S однозначно проецируется в область D_{xy} на плоскости xOy и задана уравнением $z=z(x,y)$, то

$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R\left[x,y,z(x,y)\right]dxdy;$$

знак «+» берется в том случае, если на выбранной стороне поверхности $\cos\gamma>0$, и знак «–» – если $\cos\gamma<0$.

Если поверхность S однозначно проецируется в область D_{xz} на плоскости xOz и задана уравнением $y=y(x,z)$, то

$$\iint_S Q(x,y,z)\,dxdz=\pm\iint_{D_{xz}} Q\left[x,y(x,y),z\right]dxdz;$$

знак «+» берется в том случае, если на выбранной стороне поверхности $\cos\beta>0$, и знак «–» – если $\cos\beta<0$.

Если поверхность S однозначно проецируется в область D_{yz} на плоскости yOz и задана уравнением $x=x(y,z)$, то

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz=\pm\iint_{D_{yz}} P\left[x(y,z),y,z\right]dydz;$$

знак «+» берется в том случае, если на выбранной стороне поверхности $\cos\alpha>0$, и знак «–» – если $\cos\alpha<0$.

Если ориентированная поверхность S задана явной непрерывно дифференцируемой функцией $z=z(x,y)$, то

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} (\vec{a},\vec{n})\Big|_{z=z(x,y)} dxdy,$$
$$\vec{a} = (P;Q;R), \vec{n} = \left(-z'_x;-z'_y;1\right).$$

Если S задана функцией $y = y(x,z)$, то

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{zx}} (\vec{a},\vec{n})\Big|_{y=y(x,z)} dxdz,$$
$$\vec{a} = (P;Q;R), \vec{n} = \left(-y'_x;1;-y'_z\right).$$

Если S задана функцией $x = x(y,z)$, то

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{yz}} (\vec{a},\vec{n})\Big|_{x=x(y,z)} dydz,$$
$$\vec{a} = (P;Q;R), \vec{n} = \left(1;-x'_y;-x'_z\right).$$

В формулах берется знак «+», если интегрирование ведётся по стороне $S^{+}_{z,y,x}$, и знак «–» – если $S^{-}_{z,y,x}$.

Формула Стокса

$$\oint\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

обход контура L (границы поверхности S) согласован с выбором стороны поверхности S.

Формула Стокса в символической форме

$$\oint\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Формула Остроградского – Гаусса

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz;$$

где S – внешняя сторона поверхности тела V.

2 Индивидуальное задание № 1. Двойные интегралы

2.1 Вычислить повторные интегралы:

2.1.1 *а*) $\int_{-2}^{2}dx\int_{1}^{3}\left(1+x^2\right)dy;$ *б*) $\int_{1}^{2}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy.$

Ответ: *а*) $56/3$; *б*) $2{,}25$.

2.1.2 *а*) $\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x}xydy;$ *б*) $\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{1}r\sqrt{1-r^2}\,dr.$

Ответ: *а*) $1/24$; *б*) $2\pi/3$.

2.1.3 *а*) $\int_{0}^{\pi}dx\int_{0}^{\sin x}(1+y)dy;$ *б*) $\int_{0}^{4}dy\int_{0}^{2}\left(x^3-2y\right)dx.$

Ответ: *а*) $(\pi+8)/4$; *б*) -16.

2.1.4 *а*) $\int_{0}^{3}dy\int_{0}^{2}\left(x-3y^2\right)dx;$ *б*) $\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{2\sin\varphi}^{2}rdr.$

Ответ: *а*) -48; *б*) 2π.

2.1.5 *а*) $\int_{0}^{4}dy\int_{1}^{5}\left(x+y^2\right)dx;$ *б*) $\int_{3}^{4}dx\int_{1}^{2}\frac{dy}{(x+y)^2}.$

Ответ: *а*) $400/3$; *б*) $\ln\frac{25}{24}$.

2.1.6 *а*) $\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{2}\left(x-5y^4\right)dx;$ *б*) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{0}^{3\cos\varphi}r^2\sin^2\varphi dr.$

Ответ: *а*) 0; *б*) $6/5$.

2.1.7 *а*) $\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{2}\left(x^2+y\right)dy;$ *б*) $\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2-1}^{y^2+1}xdx.$

Ответ: *а*) $8/3$; *б*) $4/3$.

2.1.8 *а*) $\int_{0}^{2}dx\int_{-1}^{1}\left(x-\frac{1}{2}y\right)dy;$ *б*) $\int_{0}^{2\pi}dy\int_{0}^{2+\sin y}2xdx.$

Ответ: *а*) 4; *б*) 9π.

2.1.9 $a)\ \int\limits_0^1 dx\int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2};$ $б)\ \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(x+3y)dy.$

Ответ: $a)\ \ln\frac{4}{3}$; $б)\ 2/3$.

2.1.10 $a)\ \int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-y}(2x+y)dx;$ $б)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{5\cos\varphi} r\sin\varphi dr.$

Ответ: $a)\ 0{,}5$; $б)\, 25/6$.

2.1.11 $a)\ \int\limits_2^3 dx\int\limits_0^1 \frac{dz}{(x+z)^2};$ $б)\ \int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{10\cos\varphi} r\cos\varphi dr.$

Ответ: $a)\ \ln\frac{9}{8}$; $б)\ 0$.

2.1.12 $a)\ \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 (x^3+12y^2)dy;$ $б)\ \int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} yzdz.$

Ответ: $a)\ 32{,}5$; $б)\, 1/12$.

2.1.13 $a)\ \int\limits_1^2 dz\int\limits_3^4 \frac{dx}{(x+z)^2};$ $б)\ \int\limits_{-3}^{3} dy\int\limits_{y^2}^{5}(x-5y)dx.$

Ответ: $a)\ \ln\frac{25}{24}$; $б)\, 26{,}4$.

2.1.14 $a)\ \int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\ln y} e^x dx;$ $б)\ \int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1 (x+12y^2)dy.$

Ответ: $a)\ -0{,}5$; $б)\, 10$.

2.1.15 $a)\ \int\limits_1^2 dx\int\limits_0^2 (10x-16y^3)dy;$ $б)\ \int\limits_1^4 dy\int\limits_0^{\ln y} e^x dx.$

Ответ: $a)\ -34$; $б)\, 4{,}5$.

2.1.16 $a)\ \int\limits_0^2 dy\int\limits_1^2 (4x-y^2)dx;$ $б)\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} yzdz.$

Ответ: $a)\ 28/3$; $б)\, 1/12$.

2.1.17 $a)\int\limits_1^3 dx\int\limits_1^2 (x^2-3y)dy;$ $б)\ \int\limits_0^{2\pi} dy\int\limits_0^{2+\sin y} xdx.$

Ответ: $a)\ -1/3$; $б)\, 9\pi/2$.

2.1.18 $a)\ \int\limits_2^3 dy\int\limits_1^3 (2+x^2)dx;$ $б)\ \int\limits_1^2 dx\int\limits_{2x}^{2x+3} ydy.$

Ответ: $a)\ 38/3$; $б)\, 13{,}5$.

2.1.19 *а*) $\int\limits_2^3 dy \int\limits_1^3 (2y + x^2)dx;$ *б*) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{2x+3} xydy.$

Ответ: *а*) $56/3$; *б*) $17/4$.

2.1.20 *а*) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} xydy;$ *б*) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} (2x + y)dx.$

Ответ: *а*) $2/3$; *б*) $1/2$.

2.1.21 *а*) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^1 (x^2 - y)dy;$ *б*) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 x^2 ydy.$

Ответ: *а*) $-1/3$; *б*) $1/15$.

2.1.22 *а*) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_y^2 (2x - y)dx;$ *б*) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^{-y}}^{e^y} dx.$

Ответ: *а*) 4; *б*) $(e-1)^2/e$.

2.1.23 *а*) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^1 x^2 ydy;$ *б*) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2-1}^{1+y^2} (2x + y)dx.$

Ответ: *а*) $-29/15$; *б*) $7/3$.

2.1.24 *а*) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^1 (5x^2 - 2y)dy;$ *б*) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^y xy^2 dx.$

Ответ: *а*) $68/3$; *б*) $16/5$.

2.1.25 *а*) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^1 (x^3 - 16y^3)dy;$ *б*) $\int\limits_0^{\sqrt{5}} dy \int\limits_1^{y^2-4} xydx.$

Ответ: *а*) $-1/4$; *б*) $25/6$.

2.1.26 *а*) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{-1}^1 (2x - y)dy;$ *б*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{16\cos\varphi} r\sin 2\varphi dr.$

Ответ: *а*) 0; *б*) 64.

2.1.27 *а*) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (x^2 + 2y)dy;$ *б*) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} (2 + e^x)dx.$

Ответ: *а*) $14/3$; *б*) $4\ln 2 - 1{,}5$.

2.1.28 *а*) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{-2}^2 (4x + 3y)dy;$ *б*) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{y^2} \frac{y}{z}dz.$

Ответ: *а*) 128; *б*) $3\ln 2 - 9/8$.

2.1.29 *а*) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x + y)dy;$ *б*) $\int\limits_0^{2\pi} dy \int\limits_0^{2+\sin y} 2xdx$

Ответ: *а*) $1/3$; *б*) 9π.

2.1.30 *а)* $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(x + y^3\right) dy;$ *б)* $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\, dr.$

Ответ: *а)* 5; *б)* $2\pi/3$.

2.2 Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:

2.2.1 *а)* $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} f(x,y)\, dy;$ *б)* $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{3-y} f(x,y)\, dx.$

2.2.2 *а)* $\int\limits_0^3 dy \int\limits_y^{10-y} f(x,y)\, dx;$ *б)* $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\, dy.$

2.2.3 *а)* $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)\, dx;$ *б)* $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)\, dy.$

2.2.4 *а)* $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\, dx;$ *б)* $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\frac{x}{2}+1} f(x,y)\, dy.$

2.2.5 *а)* $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)\, dx;$ *б)* $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dy.$

2.2.6 *а)* $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} f(x,y)\, dx;$ *б)* $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dy.$

2.2.7 *а)* $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\, dx;$ *б)* $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)\, dy.$

2.2.8 *а)* $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^1 f(x,y)\, dx;$ *б)* $\int\limits_2^{\frac{10}{3}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)\, dy.$

2.2.9 *а)* $\int\limits_3^7 dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^3 f(x,y)\, dy;$ *б)* $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)\, dx.$

2.2.10 *а)* $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f(x,y)\, dx;$ *б)* $\int\limits_7^9 dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x,y)\, dy.$

2.2.11 *а)* $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} f(x,y)dx;$ *б)* $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{3x} f(x,y)dy.$

2.2.12 *а)* $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx;$ *б)* $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

2.2.13 *а)* $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{x} f(x,y)dy;$ *б)* $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{1}{4}y^2-1}^{2-y} f(x,y)dx.$

2.2.14 *а)* $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)dy;$ *б)* $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$

2.2.15 *а)* $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy;$ *б)* $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$

2.2.16 *а)* $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx;$ *б)* $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy.$

2.2.17 *а)* $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy;$ *б)* $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)dy.$

2.2.18 *а)* $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\ln y}^{y} f(x,y)dx;$ *б)* $\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int\limits_{x^2}^{1-x^2} f(x,y)dy.$

2.2.19 *а)* $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy;$ *б)* $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{e^{-y}}^{e^y} f(x,y)dx.$

2.2.20 *а)* $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy;$ *б)* $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)dx.$

2.2.21 *а)* $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{2-y} f(x,y)dx;$ *б)* $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{x} f(x,y)dy.$

2.2.22 *а)* $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy;$ *б)* $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)dy.$

2.2.23 *а)* $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\ln y}^{y} f(x,y)dx;$ *б)* $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{x\sqrt{3}} f(x,y)dy.$

2.2.24 $a)\ \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)\,dy;$ $\quad б)\ \int_0^{\sqrt{5}} dy \int_{y^2-4}^{1} f(x,y)\,dx.$

2.2.25 $a)\ \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx;$ $\quad б)\ \int_1^2 dx \int_x^{x+3} f(x,y)\,dy.$

2.2.26 $a)\ \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)\,dx;$ $\quad б)\ \int_1^2 dx \int_x^{x+2} f(x,y)\,dy.$

2.2.26 $a)\ \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)\,dx;$ $\quad б)\ \int_1^2 dx \int_x^{x+2} f(x,y)\,dy.$

2.2.27 $a)\ \int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\,dy;$ $\quad б)\ \int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)\,dx.$

2.2.28 $a)\ \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy;$ $\quad б)\ \int_7^9 dx \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x,y)\,dy.$

2.2.29 $a)\ \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\,dy;$ $\quad б)\ \int_0^9 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)\,dx.$

2.2.30 $a)\ \int_{-2}^2 dx \int_0^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)\,dy;$ $\quad б)\ \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx.$

2.3 Вычислить двойной интеграл, где D: {область, ограниченная линиями}:

2.3.1 $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,$ $\quad D:\left\{x^2+y^2=4ax\right\}.$

Ответ: $24\pi a^4$.

2.3.2 $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy,$ $\quad D:\left\{y^2=x;\ x=0;\ y=1\right\}.$

Ответ: $0{,}5$.

2.3.3 $\iint\limits_D \left(x^2-y^2\right)dxdy,$ $\quad D:\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-4=0;\ y=x; \\ y=0,\ (y\ge 0,\ x\ge 0) \end{array}\right\}.$

Ответ: 2.

2.3.4 $\iint\limits_D e^x dxdy,$ $\qquad D:\{x=0;\ y=1;\ y=2;\ x=\ln y\}.$

Ответ: $0,5$.

2.3.5 $\iint\limits_D xydxdy,$ $\qquad D:\{y=\sqrt{x};\ y=0;\ x+y-2=0\}.$

Ответ: $3/8$.

2.3.6 $\iint\limits_D \left(x+y^3\right)dxdy,$ $\qquad D:\{x=1;\ x=2;\ y=0;\ y=2\}.$

Ответ: 7.

2.3.7 $\iint\limits_D e^{x+y} dxdy,$ $\qquad D:\{y=e^x;\ x=0;\ y=2\}.$

Ответ: e.

2.3.8 $\iint\limits_D \sqrt{a^2+x^2}dxdy,$ $\qquad D:\left\{\begin{matrix} y^2-x^2=a^2;\ x=a; \\ x=0\ \ y=0,(y>0) \end{matrix}\right\}.$

Ответ: $4a^3/3$.

2.3.9 $\iint\limits_D (4-x)dxdy,$ $\qquad D:\{x^2-4y=0;\ y=1;\ x=0,(x>0)\}.$

Ответ: $13/3$.

2.3.10 $\iint\limits_D ydxdy,$ $\qquad D:\{y=x^2;\ y=\sqrt{x}\}.$

Ответ: $3/20$.

2.3.11 $\iint\limits_D xydxdy,$ $\qquad D:\{x+y-2=0;\ x^2+y^2-2y=0\}.$

Ответ: $0,25$.

2.3.12 $\iint\limits_D \sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}dxdy,$ $\qquad D:\{x^2+y^2-1=0\}.$

Ответ: $2\pi/3$.

2.3.13 $\iint\limits_D r\sin\varphi drd\varphi,$ $\qquad D:\left\{r=2;\ \varphi=\dfrac{\pi}{6};\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}\right\}.$

Ответ: $\sqrt{3}-1$.

2.3.14 $\iint\limits_D (x+y)dxdy,$ $\qquad D:\{x=0;\ y=0;\ x+y-3=0\}.$

Ответ: 9.

2.3.15 $\iint\limits_D xydxdy,$ $\qquad D:\{x-y-4=0;\ 2x-y^2=0\}.$

Ответ: 90.

2.3.16 $\iint\limits_D \left(x - y^2\right)dxdy,$ $D:\{y = 0;\ x = 1;\ y = x\}.$

Ответ: $0,25$.

2.3.17 $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy,$ $D:\{x^2 + y^2 = 3x;\ y = 0;\ y = x\}.$

Ответ: $15\sqrt{2}/4$.

2.3.18 $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - y^2 - x^2}\,dxdy,$ $D:\left\{\begin{matrix} x^2 + y^2 = R^2;\ y = x; \\ x = \sqrt{3}y;(x \ge 0,\ y \ge 0) \end{matrix}\right\}.$

Ответ: $\pi R^3/36$.

2.3.19 $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy,$ $D:\{x^2 + y^2 = \pi^2;\ x^2 + y^2 = 4\pi^2\}.$

Ответ: $15\pi^5/2$.

2.3.20 $\iint\limits_D xydxdy,$ $D:\{x + y = 1;\ y = 0;\ x = 0\}.$

Ответ: $1/24$.

2.3.21 $\iint\limits_D (4 - y)\,dxdy,$ $D:\{x^2 = 4y;\ y = 1;\ x = 0;\ (x > 0)\}.$

Ответ: $68/15$.

2.3.22 $\iint\limits_D xydxdy,$ $D:\{(x - 1)^2 + y^2 = 1;\ y = 0;\ (y > 0)\}.$

Ответ: $2/3$.

2.3.23 $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$ $D:\{x^2 + y^2 = a^2;\ (x \ge 0,\ y \ge 0)\}$

Ответ: $\pi a/2$.

2.3.24 $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{x^2 + y^2},$ $D:\left\{\begin{matrix} x^2 - ay = 0; x^2 + y^2 = 2a^2; \\ y = 0;(x \ge 0,\ a > 0) \end{matrix}\right\}.$

Ответ: $a(2 - \ln 2)/2$.

2.3.25 $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy,$ $D:\left\{\begin{matrix} x^2 + y^2 = ax;\ x^2 + y^2 = 2ax; \\ y = 0;(y > 0) \end{matrix}\right\}.$

Ответ: $45a^4\pi/64$.

2.3.26 $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy,$ $D:\{y = x;\ x + y = 2;\ x = 0\}.$

Ответ: $45a^4\pi/64$.

2.3.27 $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy,$ $D:\{x^2 + y^2 = R^2\}.$

Ответ: $R^4\pi/2$.

2.3.28 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy,$ $\qquad D:\left\{y=x;\ y=\frac{1}{x};\ x=2\right\}.$

Ответ: $9/4$.

2.3.29 $\iint\limits_D (3x+1)dxdy,$ $\qquad D:\left\{x=4;\ y=4x;\ y=\frac{1}{x}\right\}.$

Ответ: $276{,}5-3\ln 2$.

2.3.30 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ $\qquad D:\left\{x\ge 0;\ y=0;\ y=\sqrt{a^2-x^2}\right\}.$

Ответ: $a^3\pi/6$.

3 Индивидуальное задание № 2. Тройные интегралы

3.1 Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, где V: {область, ограниченная поверхностями}

3.1.1 $V:\left\{\begin{matrix}2x+3y+4z=12;\\ x=0;\ y=0;\ z=0\end{matrix}\right\}.$

3.1.2 $V:\left\{\begin{matrix}x^2+z^2=a^2;\ y=0;\\ y=b;\quad b>0\end{matrix}\right\}.$

3.1.3 $V:\left\{z=1-x^2-y^2;\ z=0\right\}.$

3.1.4 $V:\left\{\begin{matrix}2z=x^2+y^2;\\ x^2+y^2+z^2=3\end{matrix}\right\}.$

3.1.5 $V:\left\{\begin{matrix}x^2+y^2-z=1;\\ z=0\end{matrix}\right\}.$

3.1.6 $V:\left\{\begin{matrix}z=0;\ z=x^2;\\ x+y=2;\ y=0\end{matrix}\right\}.$

3.1.7 $V:\left\{\begin{matrix}z=0;\ x^2+y^2=9;\\ z=5-x-y\end{matrix}\right\}.$

3.1.8 $V:\left\{\begin{matrix}z=0;\ z=2y;\\ y=\sqrt{9-x^2}\end{matrix}\right\}.$

3.1.9 $V:\left\{\begin{matrix}x=0; y=0; z=0;\\ 2x+3y-4z-12=0\end{matrix}\right\}.$

3.1.10 $V:\left\{\begin{matrix}x^2+y^2=1; z=0;\\ z=1;(x\ge 0; y\ge 0)\end{matrix}\right\}.$

3.1.11 $V:\left\{\begin{matrix}x+2y+3z=6;\\ x=0; y=0; z=0\end{matrix}\right\}.$

3.1.12 $V:\left\{z=4-x^2-y^2; z=0\right\}.$

3.1.13 $V:\left\{\begin{matrix}x^2+y^2=R^2;\ z=0;\\ z=H; H>0\end{matrix}\right\}.$

3.1.14 $V:\left\{x^2+y^2=z^2; z=0; z=4\right\}.$

3.1.15 $V:\left\{x^2+y^2+z^2=R^2\right\}.$

3.1.16 $V:\left\{\begin{matrix}x^2+y^2=z;\ z=0;\\ y=2x; y=6-x;\ x=0\end{matrix}\right\}.$

3.1.17 $V:\left\{\begin{matrix} z=0;\ z=\sqrt{y}; \\ y=3x;\ x=2 \end{matrix}\right\}.$

3.1.18 $V:\left\{\begin{matrix} z=0;\ x=0;\ z=y^2; \\ 2x+3y=6 \end{matrix}\right\}.$

3.1.19 $V:\left\{\begin{matrix} x=0; z=0; y=0; \\ x+y+z=6; x+2y=4 \end{matrix}\right\}.$

3.1.20 $V:\left\{\begin{matrix} z=0;\ z=3x; \\ y^2=2-x \end{matrix}\right\}.$

3.1.21 $V:\left\{\begin{matrix} z=0;\ z=y^2; \\ y=2x;\ x=3 \end{matrix}\right\}.$

3.1.22 $V:\left\{\begin{matrix} x+y+z=6; y=0; \\ x=3; z=0 \end{matrix}\right\}.$

3.1.23 $V:\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=1; \\ z=0;\ (z\ge 0) \end{matrix}\right\}.$

3.1.24 $V:\left\{\begin{matrix} 2z=x^2;\ 3x+2y=12; \\ z=0; y=0 \end{matrix}\right\}.$

3.1.25 $V:\left\{\begin{matrix} z=0;\ z=x; \\ x=\sqrt{4-y^2} \end{matrix}\right\}.$

3.1.26 $V:\left\{\begin{matrix} z=0; x=0; y=0; \\ x+y=2; z=x^2+y^2 \end{matrix}\right\}.$

3.1.27 $V:\left\{\begin{matrix} z=0;\ x^2+y^2=1; \\ x+y+z=3 \end{matrix}\right\}.$

3.1.28 $V:\left\{\begin{matrix} z=0; z=x^2; y=2x; \\ x=4; y=0 \end{matrix}\right\}.$

3.1.29 $V:\left\{\begin{matrix} y^2+z^2=R^2; x=0; \\ x=a; a>0 \end{matrix}\right\}.$

3.1.30 $V:\left\{\begin{matrix} y=\sqrt{x}; y=0; z=0; \\ x=4;\ z=1 \end{matrix}\right\}$

3.2 Вычислить тройные интегралы $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$***, где***
***V*: {*область, ограниченная поверхностями*}**
а) в декартовых координатах,
б) в цилиндрических координатах:

3.2.1 *а*) $\iiint\limits_V (6x+8y+4z+5)\,dxdydz;$ $\quad V:\left\{\begin{matrix} x=0; x=1; y=0; \\ y=1; z=0, z=1 \end{matrix}\right\};$

б) $\iiint\limits_V z^2\,dxdydz;$ $\quad V:\left\{\begin{matrix} y=\sqrt{z-x^2}; z=h; \\ (h>0); y=0 \end{matrix}\right\}.$

Ответ: *а*)14; *б*) $\pi h^4/8$.

3.2.2 *а*) $\iiint\limits_V (7x-5y+3z+1)\,dxdydz;$ $\quad V:\left\{\begin{matrix} x=0; x=2; y=0; \\ y=3; z=0; z=4 \end{matrix}\right\};$

б) $\iiint\limits_V z\,dxdydz;$ $\quad V:\left\{\begin{matrix} z=0; z=2y; \\ y=\sqrt{9-x^2} \end{matrix}\right\}.$

Ответ: *а*) 156; *б*) $81\pi/4$.

3.2.3 *а)* $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x+y=1; z=0, \\ z=4, x=0, y=0 \end{matrix}\right\};$

б) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} z=0; x^2+y^2=1; \\ z=5-x-y \end{matrix}\right\}.$

Ответ: *а)* $16/3$; *б)* $5\pi/2$.

3.2.4 *а)* $\iiint\limits_V xdxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x+y+z=1; \\ x=0; y=0; z=0 \end{matrix}\right\};$

б) $\iiint\limits_V \left(x^2+z^2\right)dxdydz;$ $\qquad V:\left\{y=2; x^2+z^2=2y\right\}.$

Ответ: *а)* $1/24$; *б)* $16\pi/3$.

3.2.5 *а)* $\iiint\limits_V xdxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} 2x+2y+z-6=0; \\ x=0; y=0; z=0 \end{matrix}\right\};$

б) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} y=0; z=0; z=a; \\ x^2+y^2=2x \end{matrix}\right\}.$

Ответ: *а)* $27/4$; *б)* $8a^2/9$.

3.2.6 *а)* $\iiint\limits_V \left(x+y+z\right)dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x=0; x=1; y=0; \\ y=1; z=0; z=1 \end{matrix}\right\};$

б) $\iiint\limits_V xdxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x^2=\dfrac{h^2}{R^2}\left(y^2+z^2\right); \\ x=h \end{matrix}\right\}.$

Ответ: *а)* $3/2$; *б)* $\pi R^2h^2/4$.

3.2.7 *а)* $\iiint\limits_V \left(1-y\right)xzdxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x=0; y=0; z=0; \\ x+y+z-1=0 \end{matrix}\right\};$

б) $\iiint\limits_V dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} y=0; x^2+z^2=2Rx; \\ x^2+y^2+z^2=4R^2 \end{matrix}\right\}.$

Ответ: *а)* $1/144$; *б)* $8\pi R^3/3$.

3.2.8 *а)* $\iiint\limits_V x^2y^2zdxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x=1; x=3; y=0; \\ y=2; z=2; z=5 \end{matrix}\right\};$

б) $\iiint\limits_V dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=2z; \\ x^2+y^2=z^2 \end{matrix}\right\}.$

Ответ: *а)* $728/3$; *б)* π.

3.2.9 $a)\iiint\limits_V x^2yzdxdydz;$ $V:\begin{Bmatrix} 2x+y+2z-2=0; \\ x=0; y=0; z=0 \end{Bmatrix};$

$б)\iiint\limits_V \left(x^2+y+z^2\right)^3 dxdydz;$ $V:\left\{x^2+z^2=1; y=0; y=1\right\}.$

Ответ: $a)$ $1/630$; $б)$ $3\pi/2$.

3.2.10 $a)\iiint\limits_V xyzdxdydz;$ $V:\begin{Bmatrix} x=0; y=0; z=0; \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{Bmatrix};$

$б)\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz;$ $V:\begin{Bmatrix} x^2+y^2=a^2; \\ z=0; z=2 \end{Bmatrix}.$

Ответ: $a)1/48; б)\pi a^2\left(a^2+8/3\right)$.

3.2.11 $a)\iiint\limits_V xdxdydz;$ $V:\begin{Bmatrix} 2x+2y+z-6=0; \\ x=0; y=0; z=0 \end{Bmatrix};$

$б)\iiint\limits_V xyzdxdydz;$ $V:\begin{Bmatrix} x^2+y^2=4; x\geq 0; \\ y\geq 0; z=0; z=4 \end{Bmatrix}.$

Ответ: $a)$ $27/4$; $б)$ 16.

3.2.12 $a)\iiint\limits_V \left(x+y+z\right)dxdydz;$ $V:\begin{Bmatrix} x=0; x=1; y=0; \\ y=1; z=0; z=1 \end{Bmatrix};$

$б)\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz;$ $V:\begin{Bmatrix} x^2+y^2-2x=0; \\ y=0; z=0; z=3 \end{Bmatrix}.$

Ответ: $a)$ $3/2$; $б)$ 8.

3.2.13 $a)\iiint\limits_V \left(1-y\right)dxdydz;$ $V:\begin{Bmatrix} x=0; y=0; z-0; \\ x+y+z-1=0 \end{Bmatrix};$

$б)\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz;$ $V:\left\{x^2+z^2=1; y=0; y=1\right\}.$

Ответ: $a)$ $1/8$; $б)$ $5\pi/6$.

3.2.14 $a)\iiint\limits_V zdxdydz;$ $V:\begin{Bmatrix} x+y+z=1; \\ x=0; y=0; z=0 \end{Bmatrix};$

$б)\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz;$ $V:\begin{Bmatrix} x^2+y^2=R^2; \\ z=0; z=H \end{Bmatrix}.$

Ответ: $a)$ $1/24$; $б)$ $\pi HR^2\left(R^2/2+H^2/3\right)$.

3.2.15 $a)\iiint\limits_V dxdydz;$ $V:\begin{Bmatrix} 2x+3y+4z-12=0; \\ x=0; y=0; z=0 \end{Bmatrix};$

$б)\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz;$ $\qquad V:\left\{x^2+y^2=2z; z=2\right\}.$

Ответ: *а*) 12; *б*) $16\pi/3$.

3.2.16 $а)\iiint\limits_V \left(y^2+z^2\right)dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x=0; x=1; y=0; \\ y=1; z=0; z=1 \end{matrix}\right\};$

$б)\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x^2+y^2=2x; \\ y=0; z=0; z=a \end{matrix}\right\}.$

Ответ: *а*) $2/3$; *б*) $8a^2/9$.

3.2.17 $а)\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x=0; x=3; y=0; \\ y=4; z=0; z=2 \end{matrix}\right\};$

$б)\iiint\limits_V dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} z=0; x^2+y^2=1; \\ x+y+z=3 \end{matrix}\right\}.$

Ответ: *а*) 108; *б*) 3π.

3.2.18 $а)\iiint\limits_V ydxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x+y+z=1; \\ z=0; y=0; x=0 \end{matrix}\right\};$

$б)\iiint\limits_V dxdydz;$ $\qquad V:\left\{x^2+y^2=1; z=0; z=1\right\}.$

Ответ: *а*) $1/24$; *б*) π.

3.2.19 $а)\iiint\limits_V xyzdxdydz;$ $\qquad V:\left\{x=1; y=x; z=y; z=0\right\};$

$б)\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x^2+y^2=R^2; \\ z=0; z=H \end{matrix}\right\}.$

Ответ: *а*) $1/48$; *б*) $\pi R^4H/2$.

3.2.20 $а)\iiint\limits_V dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x=0; y=0; z=0; \\ x+y=1; z=x^2+3y^2 \end{matrix}\right\};$

$б)\iiint\limits_V xdxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} z=0; x^2+y^2=9; \\ z=5-x-y \end{matrix}\right\}.$

Ответ: *а*) $1/3$; *б*) $-81\pi/4$.

3.2.21 $а)\iiint\limits_V zdxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{matrix} x+y+z=a; x=0; \\ y=0; z=0; a>0 \end{matrix}\right\};$

$б)\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz;$ $\qquad V:\left\{x^2+y^2=4; z=0; z=3\right\}.$

Ответ: *а*) $a^4/24$; *б*) 60π.

3.2.22 $a)\iiint\limits_V xzdxdydz;$ $V:\left\{\begin{matrix} x=0; y=0; z=0; \\ x+y=2; z=5 \end{matrix}\right\};$

$б)\iiint\limits_V dxdydz;$ $V:\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=2z; \\ x^2+y^2=z^2 \end{matrix}\right\}.$

Ответ: $a)$ $50/3$; $б)$ π.

3.2.23 $a)\iiint\limits_V ydxdydz;$ $V:\left\{\begin{matrix} x=0; y=0; z=0; \\ x=1; y=2; z=x^2+y^2 \end{matrix}\right\};$

$б)\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz;$ $V:\left\{\begin{matrix} x^2+y^2=1; z=0; \\ x+y+z=2 \end{matrix}\right\}.$

Ответ: $a)$ $14/3$; $б)$ π.

3.2.24 $a)\iiint\limits_V ydxdydz;$ $V:\left\{\begin{matrix} 2x+y+z=4; \\ x=0; y=0; z=0 \end{matrix}\right\};$

$б)\iiint\limits_V dxdydz;$ $V:\left\{\begin{matrix} z=0; z=x; \\ x=\sqrt{4-y^2} \end{matrix}\right\}.$

Ответ: $a)$ $16/3$; $б)$ $16/3$.

3.2.25 $a)\iiint\limits_V (2x+y-z)dxdydz;$ $V:\left\{\begin{matrix} x=0; y=1; y=0; \\ x=1; z=0; z=1 \end{matrix}\right\};$

$б)\iiint\limits_V xdxdydz;$ $V:\left\{\begin{matrix} z=0; z=2y; \\ y=\sqrt{9-x^2} \end{matrix}\right\}.$

Ответ: $a)$ 1; $б)$ 0.

3.2.26 $a)\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}dxdydz;$ $V:\left\{\begin{matrix} x=0; y=1; y=x; \\ z=0; z=1 \end{matrix}\right\};$

$б)\iiint\limits_V dxdydz;$ $V:\left\{\begin{matrix} y=\sqrt{4-x^2}; (x\ge 0); \\ y=\sqrt{3}x; y=0; z=0; \\ z=15x \end{matrix}\right\}.$

Ответ: $a)$ $e-2$; $б)$ $20\sqrt{3}$.

3.2.27 $a)\iiint\limits_V x^2z\sin(xy)dxdydz;$ $V:\left\{\begin{matrix} x=2; y=0; y=x; \\ z=0; z=1 \end{matrix}\right\};$

б) $\iiint\limits_V dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1; y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x; \\ y=0; z=0; z=2x; \\ \left(x\ge 0; y\ge 0\right) \end{array}\right\}.$

Ответ: *а*) $1-0{,}25\sin 4$; *б*) $1/3$.

3.2.28 *а*) $\iiint\limits_V \left(2x+y-z\right)dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{array}{l} x=0; x=1; y=0; \\ y=1; z=0; z=1 \end{array}\right\};$

б) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=2x; \\ y\ge 0; z=0; z=3 \end{array}\right\}.$

Ответ: *а*)1 ; *б*) 8.

3.2.29 *а*) $\iiint\limits_V 8y^2ze^{2xyz}dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{array}{l} x=-1; y=2; z=1; \\ x=0; y=0; z=0 \end{array}\right\};$

б) $\iiint\limits_V \left(x^2-y^2\right)dxdydz;$ $\qquad V:\left\{x^2+y^2=2z; z=2\right\}.$

Ответ: *а*) $5-e^{-4}$; *б*) 0.

3.2.30 *а*) $\iiint\limits_V \left(x+y+z\right)dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{array}{l} x=0; x=2; y=0; \\ y=3; z=0; z=1 \end{array}\right\};$

б) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;$ $\qquad V:\left\{\begin{array}{l} y^2=3x-x^2; \\ z=0; z=2 \end{array}\right\}.$

Ответ: *а*) 18; *б*) 24.

4 Индивидуальное задание № 3. Приложения двойных и тройных интегралов

4.1 Найти площадь плоской области, ограниченной линиями

4.1.1 $y=x-x^2; y=-x.$

Ответ: $4/3$.

4.1.2 $y=x^2-3x; 3x+y-4=0.$

Ответ: $32/3$.

4.1.3 $y^2=10x+25; y^2=-6x+9.$

Ответ: $16\sqrt{15}/3$.

4.1.4 $y^2=x+2; x=2.$

Ответ: $32/3$.

4.1.5 $x-y=1; y=-1; y=\ln x.$

Ответ: $0{,}5-e^{-1}$.

4.1.6 $y=\sqrt{x}; y=2\sqrt{x}; x=4.$

Ответ: $16/3$.

4.1.7 $y=0; y=x; x^2+y^2=2x.$

Ответ: $0,25\pi+0,5$.

4.1.8 $x^2+y^2=2x; x^2+y^2=4x;$

$y=x; y=0.$

Ответ: $0,75\pi+1,5$.

4.1.9 $\rho\cos\varphi=1; \rho=2.$

Ответ: $\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$.

4.1.10 $y=0; x=1; y=x^2.$

Ответ: $1/3$.

4.1.11 $y=\dfrac{1}{1+x^2}; y=\dfrac{1}{2}x^2.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{3}$.

4.1.12 $y=0; y=x^2-2x.$

Ответ: $4/3$.

4.1.13 $\begin{matrix} y=-1; y=-x; \\ x^2+y^2=-2x. \end{matrix}$

Ответ: $1,5-0,25\pi$.

4.1.14 $y=\dfrac{x^2}{2}; y=x.$

Ответ: $2/3$.

4.1.15 $x=0; y=0; x=2; y=e^x.$

Ответ: $e^2-1.$

4.1.16 $x=0; y=0; x+y=1.$

Ответ: $0,5$.

4.1.17 $y^2=x+3; x=1.$

Ответ: $32/3$.

4.1.18 $y^2=2-x; x-y+4=0.$

Ответ: $17\dfrac{1}{6}$.

4.1.19 $y=x; y=-x; y=1.$

Ответ: 1.

4.1.20 $(x-1)^2+y^2=1;$

$y=0,(y>0).$

Ответ: $\pi/2$.

4.1.21 $y=2\sqrt{x}; y=4\sqrt{x}; x=9.$

Ответ: 36.

4.1.22 $y^2=10x+25; x=0.$

Ответ: $50/3$.

4.1.23 $x=\sqrt{25-y^2}; y=\sqrt{3}x;$

$y\ge 0.$

Ответ: $\dfrac{25}{6}\pi$.

4.1.24 $y^2=x; x=0; y=1.$

Ответ: $1/3$.

4.1.25 $\rho=a(1+\cos\varphi);$

$\rho=a\cos\varphi; \ (a>0).$

Ответ: $\pi a^2/2$.

4.1.26 $y=\dfrac{1}{x}; x=0; y=1; y=3.$

Ответ: $\ln 3$.

4.1.27 $y=x; y=5x; x=1.$

Ответ: 2.

4.1.28 $y=\sin x; y=\cos x; x=0.$

Ответ: $\sqrt{2}-1$.

4.1.29 $y=4-x^2; y=x^2-2x.$

Ответ: $10,5$.

4.1.30 $y=x^2; y^2=8x.$

Ответ: $\dfrac{12\sqrt{2}-8}{3}$.

4.2 Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

4.2.1 $y = 0; y = 3 - x^2 - z^2.$

Ответ: $9\pi/2$.

4.2.2 $x - y^2 - z^2 = 0; x = 1.$

Ответ: $\pi/2$.

4.2.3 $x + y + z = 4; x = 0; y = 0;$
$z = 0; x = 3; y = 2.$

Ответ: $55/6$.

4.2.4 $z = 0;\ y + z = 2;$
$x^2 + y^2 = 4.$

Ответ: 8π.

4.2.5 $x - z = 0;\ x^2 + y^2 = 4;\ z = 0.$

Ответ: $16/3$.

4.2.6 $x + y + z - 6 = 0;$
$x^2 + y^2 = 4;\ z = 0.$

Ответ: 24π.

4.2.7 $x^2 + y^2 - 9 = 0;$
$y^2 + z - 9 = 0;\ z = 0.$

Ответ: $\pi/2$.

4.2.8 $z = 1 - x^2;\ y = 0;\ z = 0;$
$x + y = 2.$

Ответ: $8/3$.

4.2.9 $x = 0; y = 0; z = 0; x = 2;$
$y = 2; z = x^2 + y^2 + 1.$

Ответ: $44/3$.

4.2.10 $z = 0; x + y + z - 4 = 0;$
$x^2 + y^2 = 4.$

Ответ: 16π.

4.2.11 $x + y + z - 4 = 0;$
$x^2 + y^2 = 2;\ z = 0.$

Ответ: 8π.

4.2.12 $x^2 - y + z^2 = 0; y = 1.$

Ответ: $\pi/2$.

4.2.13 $y = 1; z = 0; y = x^2 + z^2.$

Ответ: $\pi/4$.

4.2.14 $2x + 3y + 4z = 12; x = 0;$
$y = 0;\ z = 0.$

Ответ: 12.

4.2.15 $x = 0; y = 0; x = 1;$
$x^2 = y^2 + z^2.$

Ответ: $\pi/6$.

4.2.16 $z = x;\ z \ge 0;\ x = \sqrt{4 - y^2}.$

Ответ: $16/3$.

4.2.17 $x^2 + y^2 = 1;\ y + z - 2 = 0;$
$z = 0.$

Ответ: 2π.

4.2.18 $x^2 + y^2 - z = 0;\ x = 0;$
$y = 0; z = 0; x + y - 4 = 0.$

Ответ: $128/3$.

4.2.19 $z \ge 0; x^2 + y^2 = 9;$
$z = 5 - x - y.$

Ответ: 45π.

4.2.20 $x + y + z = 2; x = 0;$
$y = 0; z = 0.$

Ответ: $4/3$.

4.2.21 $x = 0; y = 0; z = 0; x + y = 1;$
$z = x^2 + y^2.$

Ответ: $1/6$.

4.2.22 $x^2 + y^2 = x;$
$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

Ответ: $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{8}{9}$.

4.2.23 $x^2+y^2=4; y=0;$
$z=0; z=x.$
Ответ: $8/3$.
4.2.24 $x^2+y^2=z;\ x+y=1;$
$x=0;\ y=0;\ z=0.$
Ответ: $1/6$.
4.2.25 $x^2+y^2+z^2-2z=0;$
$x^2+y^2=z^2.$
Ответ: π.
4.2.26 $by=x^2+z^2;\ y=b(b>0).$
Ответ: $\pi b^3/2$.

4.2.27 $y=1;\ z=0;\ x^2+y^2=z;$
$y=x^2.$
Ответ: $88/105$.
4.2.28 $2x+3y+z-1=0;\ x=0;$
$y=0;\ z=0.$
Ответ: $1/36$.
4.2.29 $z=x^2+y^2;\ x+y=2;$
$x\geq 0;\ y\geq 0; z\geq 0.$
Ответ: $8/3$.
4.2.30 $z\geq 0;\ y=\sqrt{9-x^2}; z=2y.$
Ответ: 36.

4.3 Приложения кратных интегралов к задачам механики

4.3.1 Найти массу прямоугольного параллелепипеда, ограниченного плоскостями $x=0;\ y=0;\ z=0;\ x=1;\ y=1;\ z=2,$ если плотность распределения масс $\mu=x+y+z$. Ответ: 4.

4.3.2 Определить координаты центра масс области, ограниченной линиями $x^2+y^2=a^2$ *и* $y\geq 0$, если плотность распределения масс $\mu=x+y$. Ответ: $C\left(\dfrac{3\pi a}{16};\dfrac{3\pi a}{16}\right)$.

4.3.3 Определить момент инерции относительно оси Ox однородного тела, ограниченного координатной плоскостью xOy и поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *и* $x^2+y^2=4$. Ответ: $32\pi/3$.

4.3.4 Найти массу прямоугольного параллелепипеда $0\leq x\leq 3;\ 0\leq y\leq 4;\ 0\leq z\leq 2,$ если плотность распределения масс пропорциональна сумме координат текущей точки $M(x,y,z)$. Ответ: $108k$, k – коэффициент пропорциональности.

4.3.5 Найти момент инерции относительно координатной плоскости yOz однородного тела, ограниченного поверхностями $x+y+z-1=0;\ x=0; y=0;\ z=0.$ Ответ: $1/60$.

4.3.6 Найти статический момент относительно координатной плоскости xOy тела, ограниченного поверхностями $z=4; z=x^2+y^2,$ если плотность распределения масс $\mu=1$. Ответ: $64\pi/3$.

4.3.7 Определить координаты центра масс области, ограниченной прямой $y=0$, и одной полуволной синусоиды $y=\sin x$. Ответ: $C\left(\pi/2;\pi/8\right)$.

4.3.8 Определить момент инерции относительно оси Ox области, ограниченной линиями $x=0;\ y=0;x=a;y=b$. Ответ: $ab^3/3$.

4.3.9 Найти момент инерции относительно начала координат тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2;z=4$, если плотность распределения масс $\mu=1$. Ответ: $224\pi/3$.

4.3.10 Определить координаты центра масс области, ограниченной линиями $y=x^2;x=4;\ \ y=0$. Ответ: $C\left(3;4,8\right)$.

4.3.11 Найти массу прямоугольного параллелепипеда, ограниченного плоскостями $x=0;y=0;z=0;x=2;y=2;z=2$, если плотность распределения масс в каждой точке пропорциональна сумме координат этой точки. Ответ: $24k$, k – коэффициент пропорциональности.

4.3.12 Найти статический момент прямоугольника со сторонами a и b и относительно стороны a, если плотность распределения масс в каждой точке пропорциональна произведению координат этой точки. Ответ: $ka^2b^3/6$, k – коэффициент пропорциональности.

4.3.13 Вычислить момент инерции однородного тела, ограниченного плоскостями $x=0;y=0;z=0;x+y+z-3=0$, относительно координатной плоскости xOy. Ответ: $81/20$.

4.3.14 Определить координаты центра масс пластины, ограниченной линиями $y^2=x+2;x=1$. Ответ: $C\left(-1/5;0\right)$.

4.3.15 Вычислить статический момент тела, ограниченного поверхностями $x=0;y=0;\ z=0;\ x=4;y=4;\ x^2+y^2-z+1=0$, относительно координатной плоскости xOy, если плотность распределения масс $\mu=1$. Ответ: $65384/45$.

4.3.16 Вычислить момент инерции тела, ограниченного поверхностями $2x+y+z-1=0;x=0;y=0;z=0$, относительно координатной плоскости yOz, если плотность распределения масс $\mu=2$. Ответ: $1/240$.

4.3.17 Определить координаты центра масс плоской области, ограниченной линиями $y=0;x=1;y=x^3$, если известно, что плотность распределения масс в каждой точке $\mu=kxy$, где к – коэффициент пропорциональности. Ответ: $C\left(8/9;16/33\right)$.

4.3.18 Вычислить массу тела, ограниченного параболоидом вращения $x^2+y^2=2z$ и плоскостью $z=2$, если плотность пропорциональна сумме квадратов двух первых координат данной точки $M\left(x,y,z\right)$. Ответ: $16\pi k/3$, k – коэффициент пропорциональности.

4.3.19 Определить координаты центра масс однородного тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $x^2+y^2=4z$ и плоскостью $z=2$. Ответ: $C\left(0;0;4/3\right)$.

4.3.20 Вычислить статический момент тела, ограниченного поверхностями $x=0; y=0; z=0; x=4; y=4; z=x^2+y^2+1$, относительно координатной плоскости xOy, если плотность распределения масс $\mu=2$. Ответ: $130768/45$.

4.3.21 Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $x=0$; $y=0$; $z=0$; $x=1$; $y=1$; $x+y+z-3=0$, если плотность распределения масс в каждой точке пропорциональна произведению координат этой точки. Ответ: $13k/36$, k – коэффициент пропорциональности.

4.3.22 Определить момент инерции относительно координатной плоскости yOz однородного тела, ограниченного поверхностями $x=0; y=0; z=0; x+3y+z-2=0$. Ответ: $8/45$.

4.3.23 Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $x=0; y=0; z=0; x=1; y=2; z=3$, если плотность распределения масс $\mu=k\left(x+z\right)$, где k – коэффициент пропорциональности. Ответ: $12k$.

4.3.24 Определить координаты центра масс плоской области, ограниченной линиями $y=x^2; x=4; y=0$, если плотность распределения масс $\mu=k\left(2x+y\right)$, где k – коэффициент пропорциональности. Ответ: $C\left(88/27;400/63\right)$.

4.3.25 Найти массу прямоугольного параллелепипеда, ограниченного плоскостями $x=0; y=0; z=0; x=2; y=3; z=1$, если плотность распределения масс $\mu=k(x+2y+z)$, где k – коэффициент пропорциональности. Ответ: $27k$.

4.3.26 Найти момент инерции относительно начала координат однородной пластинки, ограниченной линиями $x=0$; $x=a\left(a>0\right)$; $y=0$; $y=b$ $\left(b>0\right)$. Ответ: $\dfrac{ab\left(a^2+b^2\right)}{3}$.

4.3.27 Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностью $z-1=x^2+y^2$, координатными плоскостями $x=1; y=1$. Ответ: $\dfrac{58}{45}$.

4.3.28 Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $y^2=\dfrac{1}{4}\left(x^2+z^2\right)$ и $y=2, \left(z\ge 0\right)$. Ответ: $\left(0;\dfrac{3}{2};0\right)$.

4.3.29 Найти массу пластинки, ограниченной линиями $y = x^2 - 1; x + y = 1$ с поверхностной плотностью $\mu(x, y) = 2x + 5y + 8$. Ответ: 45.

4.3.30 Найти статический момент относительно плоскости xOy однородной усеченной призмы, ограниченной координатными плоскостями и плоскостями $z = 4 - x - y;\ \ x = 1;\ y = 1$. Ответ: $\frac{55}{12}$.

5 Индивидуальное задание № 4. Криволинейные интегралы

5.1 Вычислить криволинейные интегралы первого рода по указанным кривым:

5.1.1 $\int\limits_L x dl$, $L-$дуга кривой $y = x^2$ от $A(2;4)$ до $B(1;1)$.

Ответ: $\frac{17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}}{12}$.

5.1.2 $\int\limits_L x dl$, $L-$отрезок прямой от $A(0;0)$ до $B(1;2)$. Ответ: $\sqrt{5}/2$.

5.1.3 $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $L-$ отрезок прямой $y = 0,5x - 2$ от $A(0;\text{-}2)$ до $B(4;0)$.

Ответ: $\ln \frac{4 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$.

5.1.4 $\int\limits_L xy dl$, $L-$периметр прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0, x = 2, y = 0, y = 4$. Ответ: 24.

5.1.5 $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right) dl, L-$ отрезок прямой от $A(\text{-}1;0)$ до $B(0;1)$.

Ответ: $-5\sqrt{2}$.

5.1.6 $\int\limits_L x dl, L-$ дуга кривой $y = 2x^2$ от $A(0;0)$ до $B(1;2)$.

Ответ: $\frac{17\sqrt{17} - 1}{48}$.

5.1.7 $\int\limits_L (x - y) dl$, $L-$ отрезок прямой от $A(0;0)$ до $B(4;3)$.

Ответ: $2,5$.

5.1.8 $\int\limits_L \frac{x^3 dl}{y^2}$, $L-$ дуга кривой $xy=1$ от $A(1;1)$ до $B(2;1/2)$.

Ответ: $\frac{17\sqrt{17}-2\sqrt{2}}{6}$.

5.1.9 $\int\limits_L (x+y)dl$, $L-$ контур треугольника AOB, где A(1;0), B(0;1), O(0;0).

Ответ: $1+\sqrt{2}$.

5.1.10 $\int\limits_L (x+y)dl$, $L-$ отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$ от A(–2;–3) до B(2;-1).

Ответ: $-4\sqrt{5}$.

5.1.11 $\int\limits_L xydl$, $L-$ отрезок прямой от $A(1;1)$ до B(2;4). Ответ: $4\sqrt{10}$.

5.1.12 $\int\limits_L y^2 dl$, $L-$ первая арка циклоиды $x=3(t-\sin t), y=3(1-\cos t)$.

Ответ: $460,8$.

5.1.13 $\int\limits_L (x+y)dl$, $L-$ отрезок прямой $y=3x-1$ от A(0;–1) до B(1;2).

Ответ: $\sqrt{10}$.

5.1.14 $\int\limits_L (x-2y)dl$, $L-$ дуга кривой $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$ от A(–1;0) до $B(0;1)$. Ответ: $-1,8$.

5.1.15 $\int\limits_L x^2 ydl$, $L-$ отрезок прямой от $A(1;1)$ до B(2;3). Ответ: $31\sqrt{5}/6$.

5.1.16 $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $L-$ отрезок прямой $x-2y=4$ от A(0;–2) до B(4;0).

Ответ: $\ln\frac{4+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$.

5.1.17 $\int\limits_L (x^2-y)dl$, $L-$ отрезок прямой $y=\frac{1}{4}x-1$ от A(0;–1) до B(4;0).

Ответ: $35\sqrt{17}/6$.

5.1.18 $\int\limits_L xdl$, $L-$ дуга кривой $y=x^2$ от A(3;9) до B(1;1).

Ответ: $\frac{37\sqrt{37}-5\sqrt{5}}{12}$.

5.1.19 $\int\limits_L xydl$, L – контур треугольника OAB, где $O(0;0)$, $A(4;2)$, $B(4;0)$.

Ответ: $\dfrac{16\sqrt{5}}{3}+8$.

5.1.20 $\int\limits_L xdl$, L – дуга кривой $y=x^2-2$ от $A(2;2)$ до $B(1;-1)$.

Ответ: $\dfrac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12}$.

5.1.21 $\int\limits_L \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, L – отрезок прямой от $A(0;-2)$ до $B(4;0)$.

Ответ: $\ln\dfrac{4+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$.

5.1.22 $\int\limits_L \left(xy-y^2\right)dl$, L – отрезок прямой от $A(0;0)$ до $B(1;2)$.

Ответ: $-2\sqrt{5}/3$.

5.1.23 $\int\limits_L xdl$, L – дуга кривой $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ от $B(0;1)$ до $A(2;1)$.

Ответ: $\dfrac{8\sqrt{2}-4}{3}$.

5.1.24 $\int\limits_L 2xdl$, L – дуга кривой $y=x^2$ от $B(0;0)$ до $A(1;1)$.

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{5}-1}{6}$.

5.1.25 $\int\limits_L \sin xdl$, L – дуга кривой $y=\sin x$ от $A(0;0)$ до $B\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$.

5.1.26 $\int\limits_L x^3dl$, L – дуга кривой $y=x^3$ от $A(0;0)$ до $B(1;1)$.

Ответ: $\dfrac{10\sqrt{10}-1}{54}$.

5.1.27 $\int\limits_L x^2y^2dl$, L – отрезок прямой от $A(0;0)$ до $B(2;1)$.

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

5.1.28 $\int\limits_L xdl$, L – дуга кривой $y = x^2 + 1$ от $A(0;1)$ до $B(1;2)$.

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{5}-1}{12}$.

5.1.29 $\int\limits_L y^2 dl$, L – дуга кривой $x = \ln y$ от $A(0;1)$ до $B(1;e)$.

Ответ: $\dfrac{\left(1+e^2\right)\sqrt{1+e^2}-2\sqrt{2}}{3}$.

5.1.30 $\int\limits_L ydl$, L – дуга кривой $y = x^3$ от $A(0;0)$ до $B(-1;-1)$.

Ответ: $\dfrac{1-10\sqrt{10}}{54}$.

5.2 Вычислить криволинейные интегралы второго рода, взятые вдоль данных кривых в указанных направлениях

5.2.1 $\int\limits_L x^3dx + x^2dy$, L – дуга кривой $y = x^2$ от $A(1;1)$ до $B(3;9)$. Ответ: 60.

5.2.2 $\int\limits_L (x+y)dx - xdy$, L – ломаная OBA, где $A(4;2)$, $B(2;0)$, $O(0;0)$.

Ответ: 4.

5.2.3 $\int\limits_L xdx + xdy$, L – ломаная OBA, где $A(4;2)$, $B(2;0)$, $O(0;0)$. Ответ: 14.

5.2.4 $\int\limits_L \left(x^2-2xy\right)dx + \left(y^2-2xy\right)dy$, L – дуга кривой $y = x^2$ от $A(-1;1)$ до $B(1;1)$. Ответ: $-14/15$.

5.2.5 $\int\limits_L 2xydx - x^2dy$, L – дуга кривой $x = 2y^2$ от $A(0;0)$ до $B(2;1)$.

Ответ: $12/5$.

5.2.6 $\int\limits_L 2xydx - x^2dy$, L – дуга кривой $y = \dfrac{1}{4}x^2$ от $A(0;0)$ до $B(2;1)$.

Ответ: 0.

5.2.7 $\int\limits_L \cos^3 xdx + ydy$, L – дуга кривой $y = \sin x$ от $x = 0$ до $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $7/6$.

5.2.8 $\int\limits_L (x+y)dx$, L – дуга кривой $y = \dfrac{x^2}{2}$ от $A(2;2)$ до $B(0;0)$.

Ответ: $-10/3$.

5.2.9 $\int_L (x+y)dx - xdy$, L – отрезок прямой от $A(2;0)$ до $B(4;2)$. Ответ: 2.

5.2.10 $\int_L ydx + xdy$, L – дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, пробегаемая против хода часовой стрелки, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Ответ: 0.

5.2.11 $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, L – дуга эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, пробегаемая по ходу часовой стрелки, $0 \le t \le \pi$. Ответ: $4ab^2/3$.

5.2.12 $\int_L \left(x - \dfrac{1}{y}\right)dy$, L – дуга кривой $y = x^2$ от $A(1;1)$ до $B(2;4)$.

Ответ: $\dfrac{14}{3} - 2\ln 2$.

5.2.13 $\int_L (x+y)dx$, L – ломаная OBA, где $O(0;0)$, $B(2;0)$, $A(2;2)$. Ответ: 2.

5.2.14 $\int_L ydx + xdy$, L – отрезок прямой от $A(4;2)$ до $B(0;0)$. Ответ: -8.

5.2.15 $\int_L xydx$, L – дуга кривой $y = \sin x$ от $x = \pi$ до $x = 0$. Ответ: $-\pi$.

5.2.16 $\int_L (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy$, L – ломаная ABC, где $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;5)$. Ответ: 190.

5.2.17 $\int_L x^2 dx + \dfrac{1}{y^2}dy$, L – дуга кривой $xy = 1$ от $A(1;1)$ до $B(4;1/4)$.

Ответ: 18.

5.2.18 $\int_L ydx + xdy$, L – дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, в направлении возрастания параметра $0 \le t \le \pi/4$. Ответ: $a^2/8$.

5.2.19 $\int_L (xy - y^2)dx + xdy$, L – дуга кривой $y = 2x^2$ от $A(0;0)$ до $B(1;2)$.

Ответ: $31/30$.

5.2.20 $\int_L xdy + (xy - y^{1/2})dx$, L – отрезок прямой от $A(0;0)$ до $B(1;2)$.

Ответ: $\dfrac{5 - 2\sqrt{2}}{3}$.

5.2.21 $\int_L (xy - x)dx + \dfrac{x^2}{2}dy$, L – дуга кривой $y = 2\sqrt{x}$ от $A(0;0)$ до $B(1;2)$.

Ответ: $0{,}5$.

5.2.22 $\int\limits_L xdy - ydx$, L – дуга кривой $y = x^3$ от $A(0;0)$ до $B(2;8)$. Ответ: 8.

5.2.23 $\int\limits_L \cos^3 xdx + \frac{1}{y^3}dy$, L – дуга кривой $y = \mathrm{tg}\, x$ от $x = \pi/4$ до $x = \pi/3$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{3}$.

5.2.24 $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx + xydy$, L – дуга кривой $y = e^x$ от $A(0;1)$ до $B(1;e)$.

Ответ: $\frac{9e^2+1}{12}$.

5.2.25 $\int\limits_L (x - y)dx + dy$, L – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = R^2$ от точки $x = R$. Ответ: $\pi R^2/2$.

5.2.26 $\int\limits_L \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, L – дуга кривой $y = 2\sqrt{x}$ от $A(0;0)$ до $B(1;2)$.

Ответ: $-\frac{8}{15}$.

5.2.27 $\int\limits_L \sin^3 xdx + \frac{1}{y^2}dy$, L – дуга кривой $y = \mathrm{ctg}\, x$ от $x = 0$ до $x = \pi/3$.

Ответ: $\frac{5}{24} - \sqrt{3}$.

5.2.28 $\int\limits_L x^2ydx + y^2xdy$, L – дуга кривой $x = t, y = t^3$, где $0 \le t \le 1$, в направлении возрастания параметра. Ответ: $\frac{7}{15}$.

5.2.29 $\int\limits_L y^2dx + xydy$, $L - x = a\cos t,\ y = b\sin t$, в направлении возрастания параметра $0 \le t \le \pi/2$. Ответ: $-\frac{ab^2}{3}$.

5.2.30 $\int\limits_L \left(x^2 - 2y\right)dx + \left(y^2 - 2x\right)dy$, L – отрезок прямой от $A(-4;0)$ до $B(0;2)$.

Ответ: 24.

6 Индивидуальное задание № 5. Поверхностные интегралы

6.1 Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости p, отсечённая координатными плоскостями:

6.1.1 $\iint\limits_S (2x+3y+2z)\,ds$, $p:\ x+3y+z=3$. Ответ: $15\sqrt{11}/2$.

6.1.2 $\iint\limits_S (2+y-7x+9z)\,ds$, $p:\ 2x-y-2z=-2$. Ответ: 12.

6.1.3 $\iint\limits_S (6x+y+4z)\,ds$, $p:\ 3x+3y+z=3$. Ответ: $19\sqrt{19}/6$.

6.1.4 $\iint\limits_S (x+2y+3z)\,ds$, $p:\ x+y+z=2$. Ответ: $8\sqrt{3}$.

6.1.5 $\iint\limits_S (3x-2y+6z)\,ds$, $p:\ 2x+y+2z=2$. Ответ: $2{,}5$.

6.1.6 $\iint\limits_S (2x+5y-z)\,ds$, $p:\ x+2y+z=2$. Ответ: $7\sqrt{6}/3$.

6.1.7 $\iint\limits_S (5x-8y-z)\,ds$, $p:\ 2x-3y+z=6$. Ответ: $25\sqrt{14}$.

6.1.8 $\iint\limits_S (3y-x-z)\,ds$, $p:\ x-y+z=2$. Ответ: $-20\sqrt{3}/3$.

6.1.9 $\iint\limits_S (3y-2x-2z)\,ds$, $p:\ 2x-y-2z=-2$. Ответ: 3.

6.1.10 $\iint\limits_S (2x-3y+z)\,ds$, $p:\ x+2y+z=2$. Ответ: $\sqrt{6}$.

6.1.11 $\iint\limits_S (5x+y-z)\,ds$, $p:\ x+2y+2z=2$. Ответ: 5.

6.1.12 $\iint\limits_S (3x+2y+2z)\,ds$, $p:\ 3x+2y+2z=6$. Ответ: $9\sqrt{17}$.

6.1.13 $\iint\limits_S (2x+3y-z)\,ds$, $p:\ 2x+y+z=2$. Ответ: $2\sqrt{6}$.

6.1.14 $\iint\limits_S (9x+2y+z)\,ds$, $p:\ 2x+y+z=4$. Ответ: $40\sqrt{6}$.

6.1.15 $\iint\limits_S (3x+8y+8z)\,ds$, $p:\ x+4y+2z=8$. Ответ: $96\sqrt{21}$.

6.1.16 $\iint\limits_S (4y-x+4z)\,ds$, $p:\ x-2y+2z=2$. Ответ: 1.

6.1.17 $\iint\limits_S (7x+y+2z)\,ds$, $p:\ 3x-2y+2z=6$. Ответ: $17\sqrt{17}/2$.

6.1.18 $\iint\limits_S (2x+3y+z)\,ds$, $p:\ 2x+3y+z=6$. Ответ: $18\sqrt{14}$.

6.1.19 $\iint\limits_S (4x-y+z)\,ds$, $p:\ x-y+z=2$. Ответ: $8\sqrt{3}$.

6.1.20 $\iint\limits_S (6x-y+8z)\,ds$, $p:\ x+y+2z=2$. Ответ: $14\sqrt{6}$.

6.1.21 $\iint\limits_S (4x-4y-z)ds,\quad p:\ x+2y+2z=4$. Ответ: 12.

6.1.22 $\iint\limits_S (2x+5y+z)ds,\quad p:\ x+y+2z=2$. Ответ: $5\sqrt{6}$.

6.1.23 $\iint\limits_S (4x-y+4z)ds,\quad p:\ 2x+2y+z=4$. Ответ: 44.

6.1.24 $\iint\limits_S (5x+2y+2z)ds,\quad p:\ x+2y+z=2$. Ответ: $16\sqrt{6}/3$.

6.1.25 $\iint\limits_S (2x+5y+10z)ds,\quad p:\ 2x+y+3z=6$. Ответ: $56\sqrt{14}$.

6.1.26 $\iint\limits_S (2x+15y+z)ds,\quad p:\ x+2y+2z=2$. Ответ: 10.

6.1.27 $\iint\limits_S (3x+10y-z)ds,\quad p:\ x+3y+2z=6$. Ответ: $35\sqrt{14}$.

6.1.28 $\iint\limits_S (2x+3y+z)ds,\quad p:\ 2x+2y+z=2$. Ответ: $3{,}5$.

6.1.29 $\iint\limits_S (5x-y+5z)ds,\quad p:\ 3x+2y+z=6$. Ответ: $37\sqrt{14}$.

6.1.30 $\iint\limits_S (x+3y+2z)ds,\quad p: 2x+y+2z=2$. Ответ: $4{,}5$.

6.2 Вычислить поверхностный интеграл второго рода

6.2.1 $\iint\limits_S (y^2+z^2)dydz$, где $S-$часть поверхности параболоида $x=9-y^2-z^2$, нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{i}$, отсечённая плоскостью $x=0$. Ответ: $81\pi/2$.

6.2.2 $\iint\limits_S z^2dxdy$, где $S-$внешняя сторона поверхности эллипсоида $x^2+y^2+2z^2=2$. Ответ: 0.

6.2.3 $\iint\limits_S zdxdy+ydxdz+xdydz$, где $S-$внешняя сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1$. Ответ: 3.

6.2.4 $\iint\limits_S (z+1)dxdy$, где $S-$внешняя сторона поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=16$. Ответ: $256\pi/3$.

6.2.5 $\iint\limits_S yzdydz+xzdxdz+xydxdy$, где $S-$внешняя сторона плоскости $x+y+z=4$, отсечённой координатными плоскостями. Ответ: 32.

6.2.6 $\iint\limits_S y^2dydz + x^2dxdz + z^2dxdy,$ где S – внешняя сторона поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Ответ: 0.

6.2.7 $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy,$ где S – внешняя сторона поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ответ: 4π.

6.2.8 $\iint\limits_S xzdxdy + xydydz + yzdxdz,$ где S – верхняя часть плоскости $x + y + z = 1$, отсеченная координатными плоскостями. Ответ: $1/8$.

6.2.9 $\iint\limits_S yzdxdy + xzdydz + xydxdz,$ где S – наружная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 1,$ отсеченная плоскостями $z = 0,$ $z = 5.$ Ответ: $25\pi/2$.

6.2.10 $\iint\limits_S y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz,$ где S – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\vec{k}$, вырезаемая цилиндром $x^2 + y^2 = 1$. Ответ: $\pi/4$.

6.2.11 $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right)zdxdy,$ где S – внешняя сторона нижней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9.$ Ответ: $64{,}8\pi$.

6.2.12 $\iint\limits_S x^2dydz + z^2dxdy,$ где S – часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2,$нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\vec{k}$, лежащая между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$. Ответ: $-\pi/2$.

6.2.13 $\iint\limits_S \left(2y^2 - z\right)dxdy,$ где S – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2,$нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\vec{k}$, отсекаемая плоскостью $z = 2.$ Ответ: 0.

6.2.14 $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}},$ где S – часть поверхности гиперболоида $x^2 + y^2 = z^2 + 1,$нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\vec{k}$, отсекаемая плоскостями $z = 0$ и $z = \sqrt{3}.$ Ответ: $-2\sqrt{3}\pi$.

6.2.15 $\iint\limits_S xydydz + yzdxdz + xzdxdy,$ где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ лежащая в первом октанте. Ответ: $3\pi/16$.

6.2.16 $\iint\limits_S x^2dydz + zdxdy,$ где S – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2,$ нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\vec{k}$, отсекаемая плоскостью $z=4$. Ответ: -8π.

6.2.17 $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz-zdxdy,$ где S – часть поверхности конуса $z^2=x^2+y^2$, нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$, лежащая между плоскостями $z=0$ и $z=3$. Ответ: -18π.

6.2.18 $\iint\limits_S x^2dydz-zdxdz+zdxdy,$ где S – часть поверхности параболоида $z=3-x^2-y^2$, нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$, отсечённая плоскостью $z=0$. Ответ: $9\pi/2$.

6.2.19 $\iint\limits_S yzdydz-x^2dxdz-y^2dxdy,$ где S – часть поверхности конуса $x^2+z^2=y^2$, нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\vec{j}$, лежащая между плоскостями $y=0$ и $y=1$. Ответ: $\pi/4$.

6.2.20 $\iint\limits_S x^2dydz+2y^2dxdz-zdxdy,$ где S – часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$, нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$, отсекаемая плоскостью $z=1$. Ответ: $-\pi/2$.

6.2.21 $\iint\limits_S 2xdydz+(1-z)dxdy,$ где S – внутренняя сторона поверхности $x=\sqrt{4-y^2}$, отсекаемая плоскостями $z=0$ и $z=1$. Ответ: -4π.

6.2.22 $\iint\limits_S 2xdydz-ydxdz+zdxdy,$ где S – внешняя сторона замкнутой поверхности, образованной параболоидом $3z=x^2+y^2$ и полусферой $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. Ответ: $19\pi/3$.

6.2.23 $\iint\limits_S 4xdydz+2ydxdz-zdxdy,$ где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=4$. Ответ: $160\pi/3$.

6.2.24 $\iint\limits_S (x+z)dydz+(z+y)dxdy,$ где S – внешняя сторона поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, отсеченная плоскостями $z=0$, $z=2$. Ответ: $\pi+2$.

6.2.25 $\iint\limits_S 3xdydz-ydxdz-zdxdy,$ где S – часть поверхности параболоида $9-z=x^2+y^2$, нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$, отсеченная плоскостью $z=0$. Ответ: $81\pi/2$.

6.2.26 $\iint\limits_S (y-x)dydz+(z-y)dxdz+(x-z)dxdy,$ где S – внутренняя сторона замкнутой поверхности, образованной конусом $x^2=y^2+z^2$ и плоскостью $x=1$. Ответ: π.

6.2.27 $\iint\limits_S 3x^2dydz - y^2dxdz - zdxdy,$ где S – часть поверхности параболоида $1-z=x^2+y^2$, нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$, отсеченная плоскостью $z=0$. Ответ: $-\pi/2$.

6.2.28 $\iint\limits_S \left(1+2x^2\right)dydz + y^2dxdz + zdxdy,$ где S – часть поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$, нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\vec{k}$, лежащая между плоскостями $z=0$ и $z=4$. Ответ: $128\pi/3$.

6.2.29 $\iint\limits_S x^2dydz + z^2dxdz + ydxdy,$ где S – часть поверхности параболоида $4-z=x^2+y^2$, нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$, отсеченная плоскостью $z=0$. Ответ: 0.

6.2.30 $\iint\limits_S \left(y^2+z^2\right)dydz - y^2dxdz + 2yz^2dxdy,$ где S – часть поверхности конуса $x^2+z^2=y^2$, нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\vec{j}$, лежащая между плоскостями $y=0$ и $y=1$. Ответ: $\pi/2$.

Список литературы

1 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика : функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ: учебник / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1993. – 412с.

2 **Пискунов, Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 456 с.

3 Руководство к решению задач по высшей математике : учебное пособие для вузов в 2 ч. / Под ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 2. – 400 с.

4 Сборник задач по курсу высшей математике : учеб. пособие для вузов / Под ред. Г. И. Кручковича. – М. : Высш. шк., 1973. – 576 с.

5 Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа: учеб. пособие для втузов в 2 ч. / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – Ч. 2. – 368 с.

6 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учеб. пособие / В. С. Шипачев. – М. : Высш. шк., 1998. – 460 с.