

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов всех специальностей и направлений подготовки*

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**



Могилев 2020

УДК 517.91  
ББК 22.161.6  
В 50

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «27» февраля 2020 г.,  
протокол № 6

Составитель Т. Ю. Орлова

Рецензент И. Д. Камчицкая

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по изучению темы «Дифференциальные уравнения», достаточное количество примеров с подробными решениями и упражнения для самостоятельной работы, домашние задания.

Учебно-методическое издание

## ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.  
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилёв.

© Белорусско-Российский  
университет, 2020

## Содержание

1 Дифференциальные уравнения первого порядка .....	4
2 Однородные уравнения и сводящиеся к ним .....	9
3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли .....	12
4 Уравнения в полных дифференциалах .....	17
5 Дополнительные задачи по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка» .....	19
6 Дифференциальные уравнения высших порядков .....	21
7 Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами .....	25
8 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами .....	29
9 Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и специальной правой частью .....	32
10 Дополнительные задачи по теме «Дифференциальные уравнения высших порядков» .....	37
11 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений .....	38
Список литературы .....	48

# 1 Дифференциальные уравнения первого порядка

## 1.1 Основные понятия и определения

**Дифференциальным уравнением** (ДУ) называется соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные (или дифференциалы).

ДУ называется **обыкновенным**, если неизвестная функция, входящая в уравнение, зависит только от одной независимой переменной.

**Порядком** ДУ называется порядок входящей в уравнение старшей производной (или дифференциала) неизвестной функции.

Обыкновенное ДУ первого порядка (ДУ-1) имеет вид  $F(x; y; y') = 0$ .

Уравнение  $F(x; y; y') = 0$ , разрешенное относительно производной, называют ДУ в **нормальной форме**. Оно имеет вид  $y' = f(x, y)$ , где функция  $f(x, y)$  задана в некоторой области  $D$  плоскости  $xOy$ .

Решением уравнения (частным решением)  $F(x; y; y') = 0$  называется функция  $y = \varphi(x)$ , определенная на некотором промежутке  $\sigma$  действительной оси и дифференцируемая на этом промежутке, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.

Решение ДУ, заданное неявно соотношением  $\Phi(x, y) = 0$ , называется **интегралом** этого уравнения.

График решения ДУ называется **интегральной кривой** ДУ.

Решение  $y = \varphi(x)$  ( $\Phi(x, y) = 0$ ) дифференциального уравнения  $F(x; y; y') = 0$ , удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , называется **частным решением** (или **частным интегралом**) ДУ, удовлетворяющим начальному условию.

Функция  $y = \varphi(x, C)$ , зависящая от  $x$  и постоянной  $C$ , называется **общим решением** уравнения  $F(x; y; y') = 0$ , если она является решением этого уравнения при любом фиксированном значении  $C$ ; каково бы ни было начальное условие  $y(x_0) = y_0$ , можно найти такое значение постоянной  $C = C_0$ , что функция  $y = \varphi(x, C_0)$  удовлетворяет данному начальному условию.

Равенство  $\Phi(x, y, C) = 0$ , неявно задающее общее решение, называется **общим интегралом** уравнения  $F(x; y; y') = 0$  в области  $\sigma$ .

Решение ДУ, которое не может быть получено из общего ни при каком значении  $C \in \mathbb{R}$ , называют его **особым решением**.

Процесс нахождения решения ДУ  $F(x; y; y') = 0$  называется **интегрированием** этого уравнения.

Основная задача интегрирования ДУ состоит в нахождении всех решений ДУ и изучении их свойств.

Задача отыскания решения  $y = \varphi(x)$  ДУ  $y' = f(x, y)$ , удовлетворяющего начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , называется **задачей Коши**.

**Теорема Коши:** если  $f(x, y)$  и  $f'_y(x; y)$  непрерывны в окрестности точки  $(x_0, y_0) \in D$ , то существует единственное решение  $y = \varphi(x)$  этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ .

**Пример 1** – Показать, что соотношение  $x^2 - xy + y^2 = C^2$  является общим интегралом ДУ  $(x - 2y)y' = 2x - y$ .

*Решение*

Продифференцируем данное соотношение:  $2x - y - xy' + 2yy' = 0$ . Откуда  $2x - y = (x - 2y)y'$ . Получаем данное дифференциальное уравнение. Следовательно,  $x^2 - xy + y^2 = C^2$  является общим интегралом ДУ  $(x - 2y)y' = 2x - y$ .

## 1.2 Уравнения с разделенными, разделяющимися переменными и сводящиеся к ним

ДУ 1-го порядка с **разделенными переменными** – это уравнение вида  $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$ , где при  $dx$  стоит функция, зависящая только от  $x$ , а при  $dy$  – функция, зависящая только от  $y = y(x)$ .

Общий интеграл ДУ  $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$  имеет вид:  $\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C$ , где  $C$  – произвольная постоянная.

ДУ 1-го порядка с **разделяющимися переменными** – уравнение вида  $f_1(x) \cdot \varphi_1(y)dx + f_2(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0$ .

Если  $\varphi_1(y) \cdot f_2(x) \neq 0$ , то, разделив обе части уравнения  $f_1(x) \cdot \varphi_1(y)dx + f_2(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0$  на  $\varphi_1(y) \cdot f_2(x)$ , получим уравнение с разделенными переменными  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0$ .

Следовательно, общий интеграл последнего уравнения, а значит, и уравнения  $f_1(x) \cdot \varphi_1(y)dx + f_2(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0$ , имеет вид  $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C$ .

Если же  $f_2(x) = 0$  при некотором  $x = \alpha$  или  $\varphi_1(y) = 0$  при некотором  $y = \beta$ , то уравнение  $f_1(x) \cdot \varphi_1(y)dx + f_2(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0$ , наряду с общим интегралом, имеет также решения  $x = \alpha$  или  $y = \beta$ . Если эти решения не могут быть получены из

из  $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C$  при каком-то значении  $C$ , то они будут

называться **особыми решениями**.

**Пример 2** – Найти общий и частный интегралы ДУ, удовлетворяющие начальному условию, если  $(1 + e^x)yy' = e^x$ ,  $y(0) = 1$ .

*Решение*

Разделяя переменные, получим  $ydy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx$ .

Проинтегрировав, найдем общий интеграл  $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C$ . Так как  $1 + e^x \neq 0 \quad \forall x$ , то особых решений уравнение не имеет. Полагая в общем интеграле  $x = 0$ ,  $y = 1$ , находим  $C = \frac{1}{2} - \ln 2 = \ln \frac{\sqrt{e}}{2}$ . Подставляя найденное значение  $C$  в общий интеграл, получим для ДУ частный интеграл  $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + \ln \frac{\sqrt{e}}{2}$ , удовлетворяющий начальному условию  $y(0) = 1$ .

**Пример 3** – Решить дифференциальное уравнение  $(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0$ .

*Решение*

$y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dy = 0$ ;  $\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0$ ;  $\int \frac{x+1}{x^2}dx =$   
 $= -\int \frac{1-y}{y^2}dy + C$ ;  $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = -\int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy + C$ ;  $\ln|x| - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \ln|y| + C$  – об-  
 щий интеграл данного ДУ.

Разделяя переменные, делим на  $x^2y^2 \neq 0$ . Если же  $x^2y^2 = 0$ , то имеем  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Непосредственной подстановкой убеждаемся, что  $x = 0$  и  $y = 0$  являются решениями данного ДУ. Но они не получаются из общего интеграла ни при каком значении  $C$ . Следовательно,  $x = 0$  и  $y = 0$  – особые решения данного уравнения.

**Пример 4** – Найти общий интеграл ДУ  $xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2}dy = 0$  и частный интеграл, удовлетворяющий начальному условию  $y(\sqrt{8}) = 1$ .

*Решение*

Делим обе части уравнения на  $y \cdot \sqrt{1 + x^2}$ . Получим  $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}dx + \frac{1 + y^2}{y}dy = 0$ ;

$\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}dx + \int \frac{1 + y^2}{y}dy = C$ ,  $\sqrt{1 + x^2} + \frac{y^2}{2} + \ln|y| = C$  – общий интеграл ДУ.

Полагая в общем интеграле  $x = \sqrt{8}$ ,  $y = 1$ , находим  $C$ :  
 $\sqrt{9} + \frac{1}{2} + \ln 1 = C$ ,  $C = 3,5$ . Подставляя значение  $C = 3,5$  в общий интеграл, получаем частный интеграл ДУ  $\sqrt{1+x^2} + \frac{y^2}{2} + \ln|y| = 3,5$ .

*1.2.1 ДУ, сводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными.*

ДУ вида  $y' = f(ax + by + c)$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$  сводится к ДУ с разделяющимися переменными при помощи замены  $z = ax + by$ , где  $z = z(x)$  – новая искомая функция.

**Пример 5** – Найти общий интеграл ДУ  $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$ .

*Решение*

Запишем уравнение в виде  $y' = -\frac{2x + 3y - 1}{2(2x + 3y) - 5}$ .

Введем замену  $z = 2x + 3y$ , откуда  $y = \frac{z - 2x}{3}$ ;  $y' = \frac{1}{3}z' - \frac{2}{3}$ .

Тогда  $\frac{1}{3}z' - \frac{2}{3} = -\frac{z - 1}{2z - 5}$ ;  $z' = 2 - \frac{3z - 3}{2z - 5}$ ;  $z' = \frac{z - 7}{2z - 5}$ ;  $\frac{dz}{dx} = \frac{z - 7}{2z - 5}$ ;

$$\frac{2z - 5}{z - 7} dz = dx; \quad \int \frac{2(z - 7) + 9}{z - 7} dz = \int dx + C; \quad \int \left( 2 + \frac{9}{z - 7} \right) dz = x + C;$$

$$2z + 9 \ln|z - 7| = x + C.$$

Так как  $z = 2x + 3y$ , получаем  $4x + 6y + 9 \ln|2x + 3y - 7| = x + C$  – общий интеграл данного ДУ.

### 1.3 Упражнения

1 Проинтегрировать уравнения с разделяющимися переменными:

1)  $(1 + x^2)dy - 2x(y + 3)dx = 0$ . *Ответ:*  $y = C(x^2 + 1) - 3$ ;

2)  $y \cdot y' + x = 1$ . *Ответ:*  $y^2 = 2x - x^2 + C$ ;

3)  $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$ ,  $y(\sqrt{3}) = 0$ . *Ответ:*  $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 3$ ;

4)  $y' \sin x - y \cos x = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . *Ответ:*  $y = \sin x$ ;

5)  $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1+x^2}} = 0$ . *Ответ:*  $\arcsin y = C - \ln|x + \sqrt{1+x^2}|$ ;

6)  $(1 + 2y)xdx - (1 + x^2)dy = 0$ . *Ответ:*  $1 + x^2 = C(2y + 1)$ ;

7)  $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$ . *Ответ:*  $\frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x + 1| + C$ ;

$$8) 3e^x \operatorname{tg} y dx + \frac{1-e^x}{\cos^2 y} dy = 0. \text{ Ответ: } (e^x - 1)^3 = C \cdot \operatorname{tg} y;$$

$$9) (1+y^2)(e^{2x} dx - e^y dy) - (1+y) dy = 0.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} e^{2x} = e^y + \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2} \ln|1+y^2| + C;$$

$$10) xy' - y = y^3. \text{ Ответ: } \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = Cx;$$

$$11) (1+e^x)yy' = e^y, y(0)=0. \text{ Ответ: } e^{-y}(y+1) + x - \ln(e^x+1) = 1 - \ln 2.$$

**2** Проинтегрировать уравнения, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными:

$$1) y' = \cos(x+y). \text{ Ответ: } \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = x + C;$$

$$2) y' = (4x+y+1)^2. \text{ Ответ: } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4x+y+1}{2} = x + C;$$

$$3) y' = \frac{1}{2x+y}. \text{ Ответ: } 4x+2y+1 = C \cdot e^{2y};$$

$$4) (x-2y-1)dx + (3x-6y+2)dy = 0.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{5}(x-2y) + \frac{2}{5} \ln|x-2y| = x + C;$$

$$5) y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}. \text{ Ответ: } x + \frac{x+y}{2} + \ln|1-x-y| = C.$$

### 1.4 Домашнее задание

Проинтегрировать уравнения с разделяющимися переменными:

$$1) y dx + \operatorname{ctg} x dy = 0, y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1. \text{ Ответ: } y = -2 \cos x;$$

$$2) y^2 + y' \cdot x^2 = 0, y(-1) = 1. \text{ Ответ: } y = -x;$$

$$3) \sin x \cdot \sin y dx + \cos x \cdot \cos y dy = 0. \text{ Ответ: } \cos x = C \cdot \sin y;$$

$$4) (1-x^2)y' + xy = 2x. \text{ Ответ: } y = C \cdot \sqrt{x^2-1} + 2;$$

$$5) y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}. \text{ Ответ: } y^2 + 1 = \frac{Cx^2}{x^2+1};$$

$$6) y' \sin x = y \ln y, \text{ если } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \text{ Ответ: } y = 1;$$

$$7) (x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0. \text{ Ответ: } x + 2y + 3 \ln|x+y-2| = C.$$

## 2 Однородные уравнения и сводящиеся к ним

### 2.1 Теоретическая часть

Функция  $f(x, y)$  называется **однородной  $n$ -го измерения** ( $n \in \mathbb{N}$ ) относительно своих аргументов  $x$  и  $y$ , если для любого значения  $t$ , кроме, может быть,  $t = 0$ , имеет место тождество  $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$ .

Например,  $f(x, y) = x^3 + 3x^2y$  – однородная функция 3-го измерения относительно аргументов, т. к.  $f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 \cdot (ty) = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3 \cdot f(x, y)$ .

ДУ  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  называется **однородным** относительно переменных  $x$  и  $y$ , если функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  являются однородными функциями одного и того же измерения.

Однородное ДУ  $y' = f(x, y)$  преобразуется к виду  $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ . С помощью подстановки  $\frac{y}{x} = u$  (откуда  $y = ux$ ,  $y' = u'x + u$ ) получим уравнение  $u'x + u = \varphi(u)$  с разделяющимися переменными.

**Пример 1** – Найти общее решение ДУ  $(x - y)dx - x^2dy = 0$ .

*Решение*

Имеем  $\frac{dy}{dx} = \frac{(x - y)y}{x^2}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$  – ДУ вида  $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Полагаем  $\frac{y}{x} = u$ . Тогда  $y = ux$ ,  $y' = u'x + u$ . Следовательно,

$$u'x + u = u - u^2; \quad u'x = -u^2; \quad \frac{du}{dx}x = -u^2; \quad -\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}; \quad -\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} + C \quad \text{или}$$

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + C - \text{общий интеграл исходного ДУ.}$$

**Пример 2** – Найти общее решение ДУ  $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$ , а также частное решение, удовлетворяющее начальному условию  $y(2) = 1$ .

*Решение*

Это уравнение однородное (убедиться самостоятельно). Приводим его к виду  $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ :  $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$  или  $y' = \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y}$ .

Применяем подстановку  $\frac{y}{x} = u$ . Тогда  $y = ux$ ,  $y' = u'x + u$ . Имеем

$$u'x + u = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2u}; \quad x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1}{2u}; \quad \frac{2udu}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{2udu}{u^2 - 1} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

$\ln|u^2 - 1| = \ln|x| + \ln|C|$ ;  $u^2 - 1 = Cx$ ;  $\frac{y^2}{x^2} = Cx + 1$  или  $y^2 = x^2(Cx + 1)$  – общий интеграл ДУ.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальному условию  $y(2) = 1$ . Подставив  $x = 2$ ,  $y = 1$  в общий интеграл, находим  $C$ :  $1 = 4(2C + 1)$ ,

$C = -\frac{3}{8}$ . Тогда  $y = \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{8}x\right)}$  – частное решение ДУ при условии  $y(2) = 1$ .

### 2.1.1 ДУ первого порядка, сводящиеся к однородному уравнению.

ДУ вида  $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ , где  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ , приводится к однородному уравнению с помощью подстановки  $x = u + \alpha$ ,  $y = v + \beta$ , где  $u, v$  – новые переменные;  $\alpha, \beta$  – постоянные, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

**Пример 3** – Найти общий интеграл ДУ  $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$ .

*Решение*

Запишем уравнение в виде  $y' = -\frac{2x + y - 1}{x - 2y + 3}$ . Будем применять подстановку

$$\begin{cases} x = u + \alpha, \\ y = v + \beta. \end{cases} \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ найдем из системы } \begin{cases} 2\alpha + \beta - 1 = 0, \\ \alpha - 2\beta + 3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим  $\alpha = -\frac{1}{5}$ ,  $\beta = \frac{7}{5}$ .

Следовательно,  $\begin{cases} x = u - \frac{1}{5}, \\ y = v + \frac{7}{5}, \end{cases}$  откуда  $\begin{cases} dx = du, \\ dy = dv. \end{cases}$

$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{2v - u}$  или  $\frac{dv}{du} = \frac{2 + \frac{v}{u}}{2\frac{v}{u} - 1}$ . Вводим замену  $z = \frac{v}{u}$ . Тогда  $\frac{dv}{du} = z'u + z$ .

$$z'u + z = \frac{2+z}{2z-1}, \quad z'u = \frac{2+z}{2z-1} - z, \quad \frac{dz}{du}u = \frac{-2z^2 + 2z + 2}{2z-1}, \quad \frac{2z-1}{z^2-z-1}dz = -\frac{2du}{u},$$

$$\int \frac{d(z^2 - z - 1)}{z^2 - z - 1} = -2 \int \frac{du}{u} + C_0, \quad \ln|z^2 - z - 1| = -2\ln|u| + \ln|C_1|, \quad z^2 - z - 1 = \frac{C_1}{u^2},$$

$$\frac{v^2}{u^2} - \frac{v}{u} - 1 = \frac{C_1}{u^2}, \quad v^2 - vu - u^2 = C_1.$$

Так как  $u = x + \frac{1}{5}$ ,  $v = y - \frac{7}{5}$ , то, подставив эти выражения в последнее

уравнение и упростив, получаем  $y^2 - x^2 - xy - 3y + x = C_1 - \frac{11}{5}$  или

$y^2 - x^2 - xy - 3y + x = C$  – общий интеграл ДУ.

## 2.2 Упражнения

1 Найти общие и частные (где это требуется) решения или интегралы однородных дифференциальных уравнений:

1)  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ ,  $y(1) = 1$ . Ответ:  $y^2 = 2x^2 \ln|x| + x^2$ ;

2)  $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ . Ответ:  $e^{-\frac{y}{x}} + \ln|x| = C$ ;

3)  $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$ . Ответ:  $\frac{x^2}{x^2 - y^2} = Cx$ ;

4)  $(x - y)ydx - x^2dy = 0$ ,  $y(1) = \frac{1}{3}$ . Ответ:  $y = \frac{x}{3 + \ln|x|}$ ;

5)  $y' = -\frac{x+y}{x}$ ,  $y(2) = 0$ . Ответ:  $y = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}$ ;

6)  $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$ . Ответ:  $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$ ;

7)  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ . Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = C$ ;

8)  $yy' = 2y - x$ . Ответ:  $\ln|y - x| + \frac{x}{y - x} = C$ ;

9)  $xy' = y \ln \frac{x}{y}$ . Ответ:  $1 + \ln \frac{y}{x} = \frac{C}{x}$ ;

10)  $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$ ,  $y(1) = 0$ . Ответ:  $\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{y^2 + x^2}$ ;

11)  $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$ . Ответ:  $y^2 - 3xy + 2x^2 = C$ ;

12)  $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$ ,  $y(1) = 2$ . Ответ:  $x = y \sqrt{1 - \frac{3}{8}y}$ .

**2** Решить уравнения, сводящиеся к однородным уравнениям:

1)  $(x + 2y + 1)dx + (3 - 2x)dy = 0$ . Ответ:  $\frac{4y + 5}{2x - 3} = \ln \left| x - \frac{3}{2} \right| + C$ ;

2)  $(y + 2)dx - (2x + y - 4)dy = 0$ . Ответ:  $(y + 2)^2 = C(x + y - 1)$ ;

3)  $(6x + y - 1)dx + (4x + y - 2)dy = 0$ .

Ответ:  $(2x + y - 3)^2 = C(6x + 2y - 5)$ ;

4)  $y' = 2 \left( \frac{y + 2}{x + y - 1} \right)^2$ . Ответ:  $2 \operatorname{arctg} \frac{y + 2}{x - 3} + \ln |y + 2| = C$ ;

5)  $(3x - 7y - 3)y' + (7x - 3y - 7) = 0$ .

Ответ:  $(y - x + 1)^2 \cdot (y + x - 1)^5 = C$ .

### 2.3 Домашнее задание

Найти общие и частные (где это требуется) решения или интегралы однородных дифференциальных уравнений:

1)  $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$ ,  $y(-1) = 1$ . Ответ:  $y = \frac{1 - 3x^2}{2x}$ ;

2)  $x dy + \left( x \sqrt{\frac{y}{x}} - 1 - y \right) dx = 0$ ,  $y(1) = 1$ . Ответ:  $2 \sqrt{\frac{y}{x}} - 1 = \ln |x|$ ;

3)  $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$ . Ответ:  $\frac{y}{y - x} = Cx$ ;

4)  $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$ . Ответ:  $\sin \frac{y}{x} = C - \ln |x|$ ;

5)  $(x - 2)dx + (y - 2x + 1)dy = 0$ . Ответ:  $\ln |y - x - 1| + \frac{x - 2}{y - x - 1} = C$ .

## 3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

### 3.1 Теоретическая часть

ДУ называется **линейным**, если оно линейно (т. е. первой степени) относительно искомой функции  $y$  и её производной  $\frac{dy}{dx}$ .

Общий вид линейного ДУ первого порядка имеет вид:

$$y' + P(x)y = Q(x). \quad (3.1)$$

Если правая часть уравнения (3.1)  $Q(x) \equiv 0$ , то уравнение называется **линейным однородным**, в противном случае – **неоднородным**.

Линейное однородное ДУ имеет вид:

$$y' + P(x)y = 0. \quad (3.2)$$

Рассмотрим два способа решения линейного ДУ: способ Бернулли и способ Лагранжа.

**Способ Бернулли** (подстановки). Произведём в уравнении (3.1) замену переменной, положив  $y = u \cdot v$ , где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ . Тогда  $y' = u'v + uv'$ . Уравнение (3.1) примет вид:  $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$  или

$$u'v + u(v' + P(x) \cdot v) = Q(x). \quad (3.3)$$

Одну из функций  $u(x)$  или  $v(x)$  можно взять произвольной, другая определяется на основании уравнения (3.3). В качестве функции  $v(x)$  выбираем частное решение уравнения  $v' + P(x)v = 0$ . Тогда  $v = e^{-\int P(x)dx}$ . Подставив выражение  $v$  в уравнение (3.3), найдём  $u = u(x, C)$ . Затем находим общее решение уравнения (3.1):  $y = u(x, C) \cdot v(x)$ .

**Способ Лагранжа** (способ вариации произвольной постоянной). Сначала находим общее решение соответствующего однородного линейного уравнения (3.2), т. е. соотношение  $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ . Затем, полагая в этом соотношении величину  $C$  функцией от  $x$ , ищем общее решение неоднородного уравнения (3.1) в виде  $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ .

$C(x)$  находим из уравнения (3.1), подставив в него  $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$  и  $y' = \left( C(x)e^{-\int P(x)dx} \right)' = C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \cdot P(x)$ .

**Пример 1** – Проинтегрировать уравнение  $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x$ .

*Решение*

Убедившись, что данное уравнение линейное, полагаем  $y = u \cdot v$ . Тогда  $y' = u'v + uv'$  и данное уравнение в новых переменных примет вид  $u'v + uv' - uv \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x$ ,  $u'v + u(v' - v \cdot \operatorname{ctg} x) = \sin x$ .

$$\text{Имеем } \begin{cases} v' - v \cdot \operatorname{ctg} x = 0, \\ u'v = \sin x. \end{cases}$$

Находим одно из решений уравнения  $v' - v \cdot \operatorname{ctg} x = 0$ :  $\frac{dv}{dx} = v \operatorname{ctg} x$ ,

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x dx, \int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{ctg} x dx, \text{ откуда } \ln|v| = \ln|\sin x| \text{ или } v = \sin x.$$

Находим  $u(x)$  как общий интеграл уравнения  $u'v = \sin x$ , подставив  $v = \sin x$ :  $u' \sin x = \sin x$ ,  $du = dx$ ,  $u = x + C$ .

Следовательно,  $y = uv = (x + C) \sin x$  – общее решение исходного ДУ.

**Пример 2** – Найти частное решение ДУ  $y' - y = 2e^x$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(0) = 1$ .

*Решение*

Применим метод вариации произвольной постоянной. Однородное ДУ  $y' - y = 0$ , соответствующее данному уравнению, имеет общее решение  $y = Ce^x$ , где  $C$  – произвольная постоянная. Будем искать общее решение исходного уравнения в виде  $y = C(x)e^x$ , где  $C(x)$  – неизвестная функция от  $x$ . Так как  $y' = C'(x)e^x + C(x)e^x$ , то, подставляя выражения для  $y$  и  $y'$  в неоднородное уравнение, получим  $C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = 2e^x$ . Откуда  $C'(x) = 2$ ,  $C(x) = 2x + C_1$ ,  $C_1$  – произвольная постоянная.

Общее решение данного уравнения имеет вид  $y = (2x + C_1)e^x$ .

Полагая  $y = 1$ ,  $x = 0$ , из этого уравнения находим  $C_1$ :  $C_1 = 1$ .

Тогда частное решение исходного ДУ имеет вид  $y = (2x + 1)e^x$ .

**Уравнение Бернулли** имеет вид  $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$  ( $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq 1$ ). Оно сводится к линейному при помощи подстановки  $u = y^{1-\alpha}$ . Уравнение Бернулли можно решать теми же способами, что и линейное уравнение, не производя замену  $u = y^{1-\alpha}$ .

**Пример 3** – Проинтегрировать уравнение  $xy' + y = y^2 \ln x$ .

*Решение*

Имеем уравнение Бернулли  $y' + \frac{y}{x} = y^2 \cdot \frac{\ln x}{x}$ . Полагаем  $y = u \cdot v$ . Тогда  $y' = u'v + uv'$  и данное уравнение в новых переменных примет вид:  

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = u^2v^2 \frac{\ln x}{x}, \quad u'v + u \left( v' + \frac{v}{x} \right) = u^2v^2 \frac{\ln x}{x}.$$

$$\text{Имеем } \begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0, \\ u'v = u^2v^2 \frac{\ln x}{x}. \end{cases}$$

Находим одно из решений уравнения  $v' + \frac{v}{x} = 0$ :  $v = \frac{1}{x}$ .

Тогда  $u'v = u^2 v^2 \frac{\ln x}{x}$ ;  $\frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx$ ;  $\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx - C$ ;

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[ \begin{array}{l} u_1 = \ln x; du_1 = \frac{dx}{x} \\ dv_1 = \frac{dx}{x^2}; v_1 = -\frac{1}{x} \end{array} \right] = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{\ln x + 1}{x};$$

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x + 1}{x} - C; \frac{1}{u} = \frac{\ln x + 1 + C \cdot x}{x}; u = \frac{x}{\ln x + 1 + C \cdot x}.$$

$y = uv = \frac{x}{\ln x + 1 + C \cdot x} \cdot \frac{1}{x}$ ;  $y = \frac{1}{\ln x + 1 + C \cdot x}$  – общее решение исходного ДУ.

### 3.2 Упражнения

**1** Решить линейные дифференциальные уравнения методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа):

1)  $y' - \frac{y}{x} = x$ . Ответ:  $y = x(x + C)$ ;

2)  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x} + x^2$ . Ответ:  $y = \frac{1}{x^2} \left( \frac{x^5}{5} + C \right)$ .

**2** Решить линейные дифференциальные уравнения методом подстановки (методом Бернулли):

1)  $y' + \frac{y}{x} = x^2$ . Ответ:  $y = \frac{1}{x} \left( \frac{x^4}{4} + C \right)$ ;

2)  $xy' - y = x^2 \cos x$ . Ответ:  $y = x(\sin x + C)$ .

**3** Решить линейные дифференциальные уравнения:

1)  $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$ . Ответ:  $y = \frac{x^3 + 3x + C}{(x^2 + 1)^2}$ ;

2)  $x' + x \cos y = \cos y$ ,  $x(0) = 1$ . Ответ:  $x = 1$ ;

3)  $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ . Ответ:  $y = e^{x^2} (x^2 + C)$ ;

4)  $y' - \frac{1+2x}{x+x^2} y = \frac{1+2x}{x+x^2}$ . Ответ:  $y = 1 - C \cdot (x^2 + x)$ ;

5)  $y^2 dx - (2xy + 3) dy = 0$ . Ответ:  $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$ ;

6)  $(1 + y^2) dx = (\sqrt{1 + y^2} \cdot \sin y - xy) dy$ . Ответ:  $x = \frac{C - \cos y}{\sqrt{1 + y^2}}$ ;

7)  $y' \cos x + y = 1 - \sin x$ . Ответ:  $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} (x + C)$ ;

$$8) x(x-1)y' + y = x^2 + 2x - 1, \quad y(2) = 4.$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{x}{x-1} \left( x + 2 \ln|x| + \frac{1}{x} - 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \right).$$

**4** Решить уравнения Бернулли:

$$1) y'x + y = -xy^2. \quad \text{Ответ: } y = \frac{1}{x(\ln|x| + C)};$$

$$2) x^2 y^2 y' + xy^3 = 1. \quad \text{Ответ: } y = \frac{1}{x} \cdot \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + C};$$

$$3) 2xyy' - y^2 + x = 0. \quad \text{Ответ: } y^2 = x \ln \left| \frac{C}{x} \right|;$$

$$4) ydx + \left( x - \frac{1}{2}x^3 y \right) dy = 0. \quad \text{Ответ: } x^2 = \frac{C}{y(C+y)};$$

$$5) 3xdy = y(1 + x \sin x - 3y^3 \sin x) dx. \quad \text{Ответ: } y^3(3 + Ce^{\cos x}) = x.$$

### 3.3 Домашнее задание

**1** Решить линейные дифференциальные уравнения:

$$1) x^2 + xy' = y, \quad y(1) = 0. \quad \text{Ответ: } y = x(1-x);$$

$$2) (1-x)(y' + y) = e^{-x}. \quad \text{Ответ: } y = e^{-x}(C - \ln|1-x|);$$

$$3) e^{-y} dx + (1 - xe^{-y}) dy = 0. \quad \text{Ответ: } x = e^y(-y + C);$$

$$4) 2xy' - y = 3x^2. \quad \text{Ответ: } y = x^2 + C\sqrt{x}.$$

**2** Решить уравнения Бернулли:

$$1) y' + \frac{y}{x} = -xy^2. \quad \text{Ответ: } y = \frac{1}{x^2 + Cx};$$

$$2) y' - xy = -y^3 e^{-x^2}, \quad y(0) = -1. \quad \text{Ответ: } y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x+1}.$$

## 4 Уравнения в полных дифференциалах

### 4.1 Теоретическая часть

Уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y)$ , т. е.  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$ .

Общий интеграл уравнения  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  определяется формулой  $u(x, y) = C$ .

Поскольку  $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ , то  $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ .

Необходимое и достаточное условие того, что уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  является уравнением в полных дифференциалах, выражается равенством  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

Если левая часть уравнения  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  не является полным дифференциалом, но становится таким при умножении на некоторую функцию  $\mu = \mu(x, y)$ , то  $\mu = \mu(x, y)$  называется **интегрирующим множителем**. Интегрирующий множитель зависит только от  $x$ , т. е.  $\mu = \mu(x)$ , если  $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x)$ , и зависит только от  $y$ , если  $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \varphi(y)$ .

**Пример 1** – Из семейства интегральных кривых дифференциального уравнения  $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0$  выбрать ту, которая проходит через начало координат.

*Решение*

Для данного в условии уравнения имеем  $P(x, y) = 2x \cos^2 y$ ,  $Q(x, y) = 2y - x^2 \sin 2y$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cdot 2 \cos y \cdot (-\sin y) = -2x \sin 2y$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \cdot \sin 2y$ .

Так как выполняется условие  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Следовательно,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cos^2 y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x^2 \sin 2y. \end{cases}$$

Интегрируем второе из этих уравнений ( $x$  при этом считается постоянной). Найдём следующее:  $u(x, y) = \int (2y - x^2 \sin 2y) dy + f(x)$ ,  $u(x, y) = y^2 + \frac{1}{2} x^2 \cos 2y + f(x)$ , где  $f(x)$  – функция, подлежащая определению.

Чтобы найти функцию  $f(x)$ , продифференцируем по  $x$  функцию  $u = u(x, y)$ :  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \cos 2y + f'(x)$  и, принимая во внимание равенство  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cos^2 y$ , получаем  $x \cos 2y + f'(x) = 2x \cos^2 y$ ,  $x \cos 2y + f'(x) = x(1 + \cos 2y)$ ,  $x \cos 2y + f'(x) = x + x \cos 2y$ ,  $f'(x) = x$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$ .

Итак,  $u(x, y) = y^2 + \frac{1}{2} x^2 \cos 2y + \frac{x^2}{2} + C_1$ .

В соответствии с формулой  $u(x, y) = C$  получаем  $y^2 + \frac{1}{2} x^2 \cos 2y + \frac{x^2}{2} + C_1 = C_2$ ;  $y^2 + \frac{1}{2} x^2 \cos 2y + \frac{x^2}{2} = C$ , где  $C = C_2 - C_1$ .

Имеем  $y^2 + \frac{1}{2} x^2 \cos 2y + \frac{x^2}{2} = C$  – общий интеграл данного уравнения семейства интегральных кривых.

Из этого семейства кривых выделим ту, которая проходит через начало координат. Подставим в уравнение семейства интегральных кривых начальные данные  $x = 0$  и  $y = 0$ . Получим  $C = 0$ . Итак,  $y^2 + \frac{1}{2} x^2 \cos 2y + \frac{x^2}{2} = 0$ .

## 4.2 Упражнения

Проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах:

1)  $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$ .

Ответ:  $5x^2y - 8xy + x + 3y = C$ ;

2)  $3x^2e^y + (x^3e^y - 1)y' = 0$ ,  $y(0) = 1$ . Ответ:  $x^3e^y - y = -1$ ;

3)  $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$ .

Ответ:  $\frac{y^3}{3} - \frac{3x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + 2x = C$ ;

4)  $x dx + y dy = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ . Ответ:  $x^2 + y^2 + 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = C$ ;

5)  $\frac{2x dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$ . Ответ:  $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$ ;

$$6) (\ln y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy = 0, \quad y(3) = 1.$$

$$\text{Ответ: } x \ln y - y^2 - x^2 = -10;$$

$$7) \left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0, \quad y(0) = 2.$$

$$\text{Ответ: } x^2 + y^2 + \frac{2 \sin^2 x}{y} = 4.$$

### 4.3 Домашнее задание

Проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах:

$$1) (12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 4)dy = 0.$$

$$\text{Ответ: } 6x^2 + 5xy + y^2 - 9x - 4y = C;$$

$$2) (3xy^2 - x^2)dx + (3x^2y - 6y^2 - 1)dy = 0, \quad y(0) = -2.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3x^2y^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2y^3 - y = 18;$$

$$3) \left(2x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy = 0. \quad \text{Ответ: } x^2 + ye^{\frac{x}{y}} = C.$$

## 5 Дополнительные задачи по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»

### 5.1 Упражнения

Решить дифференциальные уравнения:

$$1) y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \quad \text{Ответ: } \sin \frac{y}{x} = Cx;$$

$$2) y' - \frac{y}{x} = x^2. \quad \text{Ответ: } y = x \left( \frac{x^2}{2} + C \right);$$

$$3) (y - x^2y)x dy + dx = 0. \quad \text{Ответ: } y^2 = \ln \left| \frac{x^2 - 1}{x^2} \right| + C;$$

$$4) \frac{dy}{dx} - y \cdot \operatorname{ctg} x = 2x \cdot \sin x. \quad \text{Ответ: } y = \sin x (x^2 + C);$$

$$5) (xy + 1)y dx = x dy. \quad \text{Ответ: } y = -\frac{2x}{x^2 + C};$$

$$6) \operatorname{tg} y dx + \operatorname{tg} x dy = 0. \quad \text{Ответ: } \sin x = \frac{C}{\sin y};$$

7)  $(x + y) - (y - x)y' = 0$ . *Ответ:*  $x^2 + 2xy - y^2 = C$ ;

8)  $\left(\ln y + 4x^3y + \frac{3}{y}\right)dx + \left(\frac{x}{y} + x^4 - \frac{3x}{y^2}\right)dy = 0$ .

*Ответ:*  $x \ln y + x^4y + \frac{3x}{y} = C$ ;

9)  $y' = e^{x+y}$ . *Ответ:*  $e^x + e^{-y} = C$ ;

10)  $y' = (x + y)^2$ . *Ответ:*  $\operatorname{arctg}(x + y) = x + C$ ;

11)  $\frac{dx}{dy} + 3x = e^{2y}$ . *Ответ:*  $x = e^{-3y} \left( \frac{1}{5} e^{5y} + C \right)$ ;

12)  $\frac{dx}{x} = \operatorname{tg} y dy$ . *Ответ:*  $x \cos y = C$ ;

13)  $x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$ . *Ответ:*  $y = C \left( \ln \frac{y}{x} + 1 \right)$ ;

14)  $y' \cos x + y \sin x = 1$ . *Ответ:*  $y = \cos x (\operatorname{tg} x + C)$ ;

15)  $ydx - xdy = xydx$ . *Ответ:*  $x + \ln \left| \frac{y}{x} \right| = C$ ;

16)  $y' - 2y = e^x - x$ . *Ответ:*  $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + C \cdot e^{2x} - e^x$ ;

17)  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$ . *Ответ:*  $y = \frac{(x \cdot \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C)^2}{x^2}$ ;

18)  $(x + xy^2) - (y + yx^2)y' = 0$ . *Ответ:*  $x^2 + 1 = C(y^2 + 1)$ ;

19)  $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ . *Ответ:*  $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx$ ;

20)  $(\cos x \cdot \cos y - 3x^2y^2 + 2xy + 5)dy - (\sin x \cdot \sin y + 2xy^3 - y^2 + 4)dx = 0$ .

*Ответ:*  $\cos x \cdot \sin y - x^2y^3 + xy^2 + 5y - 4x = C$ .

## 6 Дифференциальные уравнения высших порядков

### 6.1 Теоретическая часть

**Обыкновенным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка** называется уравнение вида  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , где  $x$  – независимая переменная;  $y$  – иско-мая функция переменной  $x$ ;  $y', \dots, y^{(n)}$  – её производные.

При этом функция  $F$  может явно не зависеть от  $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ , но обяза-тельно должна зависеть от  $y^{(n)}$ .

Уравнение  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , разрешенное относительно  $y^{(n)}$ , т. е. запи-санное в виде  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , называется **ДУ в нормальной форме**.

Функция  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , зависящая от  $x$  и  $n$  произвольных по-стоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , называется **общим решением уравнения**  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , если она является решением этого уравнения для любых значений  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ; каковы бы ни были начальные условия  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ , существуют единственные значения постоянных  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ , такие, что функция  $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$  удовлетворяет началь-ным условиям.

Неявно заданное общее или частное решение ДУ называется соответствен-но **общим или частным интегралом ДУ**.

Задача Коши и теорема Коши для ДУ высшего порядка формулируются аналогично их формулировкам для ДУ первого порядка.

#### 6.1.1 Уравнения, допускающие понижение порядка.

Рассмотрим ДУ  $y^{(n)} = f(x)$ ,  $F(x, y', y'') = 0$ ,  $F(y, y', y'') = 0$ .

Уравнение вида  $y^{(n)} = f(x)$  решается  $n$ -кратным интегрированием ДУ.

**Пример 1** – Найти общее решение ДУ  $y''' = \frac{1}{x^3}$  и частное решение, удовле-творяющее начальным условиям  $y(1) = 2$ ,  $y'(1) = \frac{1}{2}$ ,  $y''(1) = \frac{3}{2}$ .

*Решение*

Последовательно интегрируя данное уравнение, имеем

$$y'' = \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C_1, \quad y' = \int \left( -\frac{1}{2x^2} + C_1 \right) dx = \frac{1}{2x} + C_1x + C_2,$$

$y = \int \left( \frac{1}{2x} + C_1x + C_2 \right) dx$ ;  $y = \frac{1}{2} \ln|x| + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$  – общее решение ДУ.

Подставляя  $x=1$ ,  $y=2$ ,  $y'=1/2$ ,  $y''=3/2$  в равенства  $y'' = -\frac{1}{2x^2} + C_1$ ,  
 $y' = \frac{1}{2x} + C_1x + C_2$ ,  $y = \frac{1}{2}\ln|x| + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$ , найдём значения  $C_1, C_2, C_3$ . Име-  
 ем  $\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + C_1$ ,  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_1 + C_2$ ,  $2 = \frac{1}{2}\ln 1 + C_1 \cdot \frac{1}{2} + C_2 + C_3$ .

Откуда  $C_1=2$ ,  $C_2=-2$ ,  $C_3=3$ . Искомое частное решение получаем из  
 общего решения, подставляя найденные значения произвольных постоянных:  
 $y = \frac{1}{2}\ln|x| + x^2 - 2x + 3$ .

Уравнение вида  $F(x, y', y'') = 0$ , не содержащее явно функцию  $y$ , преобра-  
 зуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки  $y' = p(x)$ ,  
 откуда  $y'' = \frac{dp}{dx}$ .

**Пример 2** – Проинтегрировать уравнение  $y'' = 2(y' - 1)\operatorname{ctg} x$ .

*Решение*

Имеем уравнение вида  $F(x, y', y'') = 0$ . Полагаем  $y' = p$ ,  $p = p(x)$ . Тогда  
 $y'' = \frac{dp}{dx}$ . После подстановки получаем ДУ 1-го порядка с разделяющимися пе-  
 ременными  $\frac{dp}{dx} = 2(p-1)\operatorname{ctg} x$ .

Разделяя переменные и интегрируя, находим  $p(x)$ .

$$\frac{dp}{p-1} = 2\operatorname{ctg} x dx, \quad \int \frac{dp}{p-1} = 2 \int \operatorname{ctg} x dx, \quad \ln|p-1| = 2\ln|\sin x| + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$p-1 = C_1 \sin^2 x, \quad p = 1 + C_1 \sin^2 x.$$

Заменяя переменную  $p$  на  $\frac{dy}{dx}$ , получим уравнение  $\frac{dy}{dx} = 1 + C_1 \sin^2 x$ , отку-  
 да  $dy = (1 + C_1 \sin^2 x) dx$ .

Интегрируя, найдём общее решение:  $y = \int (1 + C_1 \sin^2 x) dx =$   
 $= x + \frac{C_1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx$ ,  $y = x + \frac{C_1}{2} x - \frac{C_1}{4} \sin 2x + C_2$  – общее решение ДУ.

Уравнение вида  $F(y, y', y'') = 0$ , не содержащее явно аргумента  $x$ , преобра-  
 зуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки  $y' = p(y)$ , откуда  
 $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$ .

**Пример 3** – Найти частное решение уравнения  $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 2$ .

*Решение*

Имеем уравнение вида  $F(y, y', y'') = 0$ . Полагаем  $y' = p$ ,  $p = p(y)$ . Тогда  $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$ . Имеем  $y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 = y^2 \cdot p$  или  $p \left( y \frac{dp}{dy} - p - y^2 \right) = 0$ .

Приравнявая первый множитель к нулю, получаем простейшее уравнение  $p = 0$ , т. е.  $y' = 0$ . Его решение  $y = C$ .

Приравнявая второй множитель к нулю, получаем линейное ДУ относительно  $p(y)$   $yp' - p - y^2 = 0$  или  $p' - \frac{1}{y}p = y$ .

Его решение ищем в виде  $p = uv$ . Тогда  $p' = u'v + uv'$ ,  $u'v + uv' - \frac{uv}{y} = y$ ,  
 $u'v + u \left( v' - \frac{v}{y} \right) = y$ ,  $v' - \frac{v}{y} = 0$ ,  $\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$ ,  $v = y$ .

Так как  $v = y$ , то  $u'v = y$  или  $\frac{du}{dy} y = y$ , откуда  $\frac{du}{dy} = 1$  или  $u = y + C_1$ . Тогда  $p = y(y + C_1)$ ,  $y' = y(y + C_1)$ .

Из начальных условий найдем  $C_1$ . Так как  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 2$ , то  $2 = 1(1 + C_1)$ , откуда  $C_1 = 1$ . Следовательно,  $y' = y(y + 1)$  или  $\frac{dy}{dx} = y^2 + y$ . Откуда  $\frac{dy}{y^2 + y} = dx$ . Интегрируя, получаем  $\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int dx + C_2$ ,  $\int \frac{dy}{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = x + C_2$ ,

$$\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right| = x + C_2, \quad \ln \left| \frac{y}{y + 1} \right| = x + C_2.$$

Найдем  $C_2$ :  $\ln \frac{1}{2} = 1 + C_2$ ,  $C_2 = -1 - \ln 2$ .

Итак,  $\ln \left| \frac{y}{y + 1} \right| = x - 1 - \ln 2$  – частное решение данного ДУ.

## 6.2 Упражнения

Найти общие и частные (где это требуется) решения дифференциальных уравнений высших порядков, используя методы понижения порядка:

1)  $y''' = \cos 2x$ . *Ответ:*  $y = -\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$ ;

2)  $y'' = 3x^2$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ . *Ответ:*  $y = \frac{x^4}{4} + x + 2$ ;

3)  $y''' = \frac{24}{(x+2)^5}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = -\frac{5}{8}$ .

*Ответ:*  $y = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$ ;

4)  $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$ . *Ответ:*  $y = C_1 \left( \frac{x^3}{3} + x \right) + C_2$ ;

5)  $x(y'' + 1) + y' = 0$ . *Ответ:*  $y = -\frac{x^2}{4} + C_1 \ln|x| + C_2$ ;

6)  $y'' = \frac{y'}{x} \left( 1 + \ln \frac{y'}{x} \right)$ ,  $y(1) = \frac{1}{2}$ ,  $y'(1) = 1$ . *Ответ:*  $y = \frac{1}{2}x^2$ ;

7)  $y^{IV} = \frac{y'''}{x}$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 2$ ,  $y''(1) = 0$ ,  $y'''(1) = 1$ .

*Ответ:*  $y = \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{4} + \frac{7}{3}x - \frac{9}{8}$ ;

8)  $xy''' + y'' - x - 1 = 0$ . *Ответ:*  $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1(x \ln x - x) + C_2 x + C_3$ ;

9)  $1 + (y')^2 = 2yy''$ . *Ответ:*  $\frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2$ ;

10)  $2(y')^2 = (y-1)y''$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

*Ответ:*  $y = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2}$ ,  $y = \frac{x}{x+1}$ ;

11)  $yy'' - (y')^2 = y^3$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 4$ . *Ответ:*  $\sqrt{\frac{2}{y}} = 1 - x$ .

### 6.3 Домашнее задание

Найти общие и частные (где это требуется) решения дифференциальных уравнений высших порядков, используя методы понижения порядка:

$$1) y''' = 8e^{-2x} + 3x^2. \text{ Ответ: } y = -e^{-2x} + \frac{x^5}{20} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3;$$

$$2) y''' = \frac{6}{x^3}, y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = 1. \text{ Ответ: } y = 3 \ln x + 2x^2 - 6x + 6;$$

$$3) y'' - \frac{y'}{x} = 0. \text{ Ответ: } y = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2;$$

$$4) (1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3. \text{ Ответ: } y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + C_1 \operatorname{arctg} x + C_2;$$

$$5) y'' - 2yy' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1. \text{ Ответ: } y = \frac{1}{1-x};$$

$$6) 2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2. \text{ Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{C_1 y - 4}}{2} = \pm x + C_2.$$

## 7 Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

### 7.1 Теоретическая часть

Уравнение вида  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = 0$ , где  $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$  – непрерывные на некотором интервале  $(a; b)$  функции, называется **линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ)  $n$ -го порядка**.

Система функций  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  называется **линейно независимой** на интервале  $(a; b)$ , если равенство  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ , где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , выполняется тогда, и только тогда, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Всякая система из  $n$  линейно независимых частных решений  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  ЛОДУ  $n$ -го порядка называется **фундаментальной системой решений** этого уравнения.

**Структура общего решения ЛОДУ  $n$ -го порядка:** если  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  – фундаментальная система решений ЛОДУ  $n$ -го порядка, то общее решение  $(y_{oo})$  этого уравнения имеет вид  $y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ , где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные.

Уравнение вида  $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$ , где  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  – некоторые числа, называется **линейным однородным ДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами**.

Уравнение  $k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0$  называется **характеристическим уравнением** ЛОДУ  $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$ .

Уравнение  $k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0$  по основной теореме алгебры имеет  $n$  корней:  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Каждому из этих корней соответствует частное решение  $y_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) ЛОДУ по правилу (таблица 7.1).

Таблица 7.1 – Частные решения ЛОДУ в зависимости от корней характеристического уравнения

Корни характеристического уравнения $k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0$	Частное решение ЛОДУ
$k \in \mathbb{R}$ – однократный корень	$e^{kx}$
$k \in \mathbb{R}$ – $r$ -кратный корень	$e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \dots, x^{r-1} e^{kx}$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ – однократные корни	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ – $r$ -кратные корни	$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$ $e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

Общее решение ЛОДУ, согласно структуре общего решения ЛОДУ, имеет вид  $y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ , где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные.

Частным случаем ЛОДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами является ЛОДУ второго порядка  $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ , где  $p, q \in \mathbb{R}$ .

Характеристическое уравнение ДУ  $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$  имеет вид  $k^2 + pk + q = 0$ . Общее решение ДУ  $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$  в зависимости от корней характеристического уравнения можно представить в следующем виде (таблица 7.2).

Таблица 7.2 – Частные решения ЛОДУ второго порядка в зависимости от корней характеристического уравнения

Корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$	Фундаментальная система решений ДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$	Общее решение ДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$
$k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$	$y_1 = e^{k_1 x}; y_2 = e^{k_2 x}$	$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$	$y_1 = e^{kx}; y_2 = xe^{kx}$	$y_{oo} = e^{kx} (C_1 + C_2 x)$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x; y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$y_{oo} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

**Пример 1** – Найти общее решение уравнения  $y'' - y' - 12y = 0$ .

*Решение*

Характеристическое уравнение ДУ  $k^2 - k - 12 = 0$ . Его корни  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = -3$ . Общее решение данного уравнения имеет вид  $y_{oo} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x}$ .

**Пример 2** – Найти общее решение уравнения  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .

*Решение*

Характеристическое уравнение ДУ  $k^2 - 4k + 4 = 0$ . Его корни  $k_{1,2} = 2$ . Общее решение данного уравнения имеет вид  $y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$ .

**Пример 3** – Найти общее решение уравнения  $y'' + 4y' + 20y = 0$ .

*Решение*

Характеристическое уравнение ДУ  $k^2 + 4k + 20 = 0$ . Его корни  $k_{1,2} = -2 \pm 4i$ . Общее решение данного уравнения имеет вид  $y_{oo} = e^{-2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$ .

**Пример 4** – Проинтегрировать уравнение  $y'' - 5y' - 6y = 0$  и найти частное решение при начальных условиях  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 4$ .

*Решение*

Характеристическое уравнение  $k^2 - 5k - 6 = 0$  имеет корни  $k_1 = -1$  и  $k_2 = 6$ . Общее решение данного уравнения имеет вид  $y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}$ .

Тогда  $y'_{oo} = -C_1 e^{-x} + 6C_2 e^{6x}$ . Используя начальные условия, получим систему двух линейных уравнений относительно произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2, \\ 4 = -C_1 + 6C_2. \end{cases}$$

Решая систему, получим  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 1$ . Следовательно,  $y_u = 2e^{-x} + e^{6x}$  искомого частного решения.

**Пример 5** – Найти общее решение уравнения  $y''' - 2y'' - 8y' = 0$ .

*Решение*

Характеристическое уравнение  $k^3 - 2k^2 - 8k = 0$ . Его корни  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = -2$ ,  $k_3 = 4$  – действительные и различные числа. Соответствующие

частные решения  $y_1 = e^{0x} = 1$ ,  $y_2 = e^{-2x}$ ,  $y_3 = e^{4x}$ . Общее решение данного уравнения имеет вид  $y_{oo} = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{4x}$ .

**Пример 6** – Найти общее решение уравнения  $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 2y^{(3)} = 0$ .

*Решение*

Характеристическое уравнение  $k^5 + 2k^4 + 2k^3 = 0$ . Его корни  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ,  $k_{4,5} = -1 \pm i$ . Соответствующие частные решения  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = x$ ,  $y_3 = x^2$ ,  $y_4 = e^{-x} \cos x$ ,  $y_5 = e^{-x} \sin x$ . Общее решение данного уравнения имеет вид  $y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{-x} (C_4 \cos x + C_5 \sin x)$ .

## 7.2 Упражнения

Найти общие решения уравнений и частные решения при заданных начальных условиях (где это требуется):

- 1)  $y'' - 5y' + 4y = 0$ . *Ответ:*  $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$ ;
- 2)  $y'' + 8y' + 16y = 0$ . *Ответ:*  $y = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$ ;
- 3)  $y'' - 6y' + 34y = 0$ . *Ответ:*  $y = e^{3x} (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$ ;
- 4)  $y'' - 4y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 6$ ,  $y'(0) = 10$ . *Ответ:*  $y = 2e^{3x} + 4e^x$ ;
- 5)  $y'' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ . *Ответ:*  $y = \sin 2x$ ;
- 6)  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -1$ . *Ответ:*  $y = 3e^{2x} - 7xe^{2x}$ ;
- 7)  $y''' - 10y'' + 25y' = 0$ . *Ответ:*  $y = C_1 + C_2 e^{5x} + C_3 x e^{5x}$ ;
- 8)  $y^{(6)} - 6y^{(5)} + 13y^{(4)} = 0$ .

*Ответ:*  $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{3x} \cos 2x + C_6 e^{3x} \sin 2x$ ;

9)  $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$ . *Ответ:*  $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{3x}$ ;

10)  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = -6$ .

*Ответ:*  $y = -2e^x + \cos 2x + \sin 2x$ .

## 7.3 Домашнее задание

Найти общие решения уравнений и частные решения при заданных начальных условиях (где это требуется):

- 1)  $y'' - 6y' + 9y = 0$ . *Ответ:*  $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ ;
- 2)  $4y'' - 8y' + 5y = 0$ . *Ответ:*  $y = e^x \left( C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2} \right)$ ;
- 3)  $y'' - 2y' - 15y = 0$ . *Ответ:*  $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{5x}$ ;

$$4) y^{IV} + 4y'' + 3y = 0.$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \sin \sqrt{3}x;$$

$$5) y^{IV} + 2y''' + y'' = 0. \text{ Ответ: } y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x};$$

$$6) 3y'' + 7y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -2/3. \text{ Ответ: } y = 2e^{-x} - e^{-\frac{4}{3}x};$$

$$7) 4y'' + 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0. \text{ Ответ: } y = (2 + x)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

## 8 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

### 8.1 Теоретическая часть

Уравнение вида  $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_ny = f(x)$ , где  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  – некоторые числа,  $f(x)$  – непрерывная на некотором интервале  $(a; b)$  функция, называется **линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ)  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами**. Действительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – коэффициенты,  $f(x)$  – правая часть ЛНДУ.

Уравнение  $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_ny = 0$  называется **однородным уравнением, соответствующим ЛНДУ**  $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_ny = f(x)$ .

**Структура общего решения ЛНДУ  $n$ -го порядка.** Общее решение  $y_{он}$  ЛНДУ есть сумма его произвольного частного решения  $y_{чн}$  и общего решения  $y_{оо}$  соответствующего, т. е.  $y_{он} = y_{чн} + y_{оо}$ .

Рассмотрим **метод Лагранжа** (вариации произвольных постоянных). Для решения линейного неоднородного уравнения  $n$ -го порядка методом Лагранжа рекомендуется:

– найти фундаментальную систему решений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  соответствующего однородного уравнения;

– записать вид общего решения ЛОДУ:  $y_{оо} = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ , где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные;

– записать общее решение ЛНДУ, считая  $C_1, C_2, \dots, C_n$  функциями от  $x$ :  $y_{он} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n$ ;

– для определения  $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$  составить систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x); \end{cases}$$

– найти функции  $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$  и подставить их в формулу  $y_{он} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n$ .

**Метод Лагранжа для ЛНДУ второго порядка**  $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ :

– для соответствующего ЛОДУ  $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$  записываем общее решение  $y_{оо} = C_1y_1 + C_2y_2$ ;

– общее решение ЛНДУ будем искать в виде  $y_{он} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ ;

– для определения  $C_1'(x)$  и  $C_2'(x)$  составляем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

**Пример 1** – Найти общее решение уравнения  $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$ .

*Решение*

Рассмотрим однородное уравнение  $y'' + 4y = 0$ . Его характеристическое уравнение  $k^2 + 4 = 0$  имеет корни  $k_{1,2} = \pm 2i$ . Общее решение однородного уравнения имеет вид  $y_{оо} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ .

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{он} = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x.$$

Система уравнений для определения  $C_1'(x)$  и  $C_2'(x)$  имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x) \sin 2x + 2C_2'(x) \cos 2x = \operatorname{tg} 2x. \end{cases}$$

Находим  $C_1'(x)$  и  $C_2'(x)$ :  $C_1'(x) = -\frac{\sin^2 2x}{2 \cos 2x}$ ,  $C_2'(x) = \frac{\sin 2x}{2}$ .

Интегрируя полученные равенства, имеем

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos^2 2x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \int \left( \cos 2x - \frac{1}{\cos 2x} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_1, \quad C_2(x) = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_2.$$

Общее решение данного уравнения запишется в виде

$$y_{\text{он}} = \left( \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_1 \right) \cos 2x + \left( -\frac{1}{4} \cos 2x + C_2 \right) \sin 2x$$

или

$$y_{\text{он}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

## 8.2 Упражнения

Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных:

1)  $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ . Ответ:  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|$ ;

2)  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$ . Ответ:  $y = e^{-2x} \left( C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{3}{4} x^2 \right)$ ;

3)  $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$ . Ответ:  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1)$ ;

4)  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$ . Ответ:  $y = e^x \left( C_1 + C_2 x + \sqrt{4-x^2} + x \arcsin \frac{x}{2} \right)$ ;

5)  $y'' + y = \sin^2 x$ . Ответ:  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{3} \sin^4 x$ ;

6)  $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$ .

Ответ:  $y = e^{2x} \left( C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x \right)$ ;

7)  $y'' + 6y' + 9y = \frac{1}{xe^{3x}}$ . Ответ:  $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + x e^{-3x} \ln |x|$ ;

8)  $y''' + y' = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$ .

Ответ:  $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{\cos x} + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x - \operatorname{tg} x \sin x$ .

### 8.3 Домашнее задание

Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных:

$$1) y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \frac{1}{2} x \sin x;$$

$$2) y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}. \text{ Ответ: } y = e^{-2x} \left( C_1 + C_2 x + \frac{1}{2x} \right);$$

$$3) y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}. \text{ Ответ: } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2 \cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x};$$

$$4) y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}. \text{ Ответ: } y = C_1 + C_2 e^x + \sqrt{1 - e^{2x}} + e^x \arcsin e^x;$$

$$5) y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0. \text{ Ответ: } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 2.$$

## 9 Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

### 9.1 Теоретическая часть

Рассмотрим линейное неоднородное ДУ с постоянными коэффициентами  $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x)$ , где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – действительные числа, а правая часть  $f(x)$  имеет вид  $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$ , где  $P_n(x)$ ,  $Q_m(x)$  – многочлены  $n$ -й и  $m$ -й степеней соответственно. Правая часть такого вида называется специальной правой частью.

Общее решение  $y_{он}$  линейного неоднородного уравнения равно сумме общего решения  $y_{оо}$  соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения  $y_{чн}$  линейного неоднородного уравнения:  $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$ .

Частное решение  $y_{чн}$  для ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью ищется в виде  $y_{чн} = x^r e^{\alpha x} (M_l(x) \cos \beta x + N_l(x) \sin \beta x)$ , где  $r$  – кратность корня  $\alpha + i\beta$  характеристического уравнения;  $M_l(x)$  и  $N_l(x)$  – многочлены степени  $l$  с неопределенными коэффициентами,  $l = \max(n, m)$ .

Приведем сводную таблицу видов частных решений для различных видов правых частей линейного неоднородного уравнения со специальной правой частью (таблица 9.1).

Таблица 9.1 – Вид частного решения ЛНДУ в зависимости от вида правой части

Правая часть ДУ	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$	Число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности $r$	$y_{\text{чп}} = x^r e^{\alpha x}(M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x)$ , $l = \max(n, m)$
$P_n(x)$	Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности $r$	$y_{\text{чп}} = x^r Q_n(x)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	Число $\alpha$ является корнем характеристического уравнения кратности $r$	$y_{\text{чп}} = x^r P_n(x)e^{\alpha x}$
$a\cos\beta x + b\sin\beta x$	Число $i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности $r$	$y_{\text{чп}} = x^r (A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

**Замечание** – Многочлены с неопределенными коэффициентами имеют вид:

$$P_0(x) = A - \text{многочлен нулевой степени};$$

$$P_1(x) = Ax + B - \text{многочлен первой степени};$$

$$P_2(x) = Ax^2 + Bx + C - \text{многочлен второй степени};$$

$$P_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D - \text{многочлен третьей степени и т. д.}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочленов надо выражение  $y_{\text{чп}}$  подставить в данное ДУ и после сокращения на  $e^{\alpha x}$  приравнять коэффициенты при одинаковых степенях аргумента  $x$  или при  $\cos\beta x$  и  $\sin\beta x$ . Из полученной при этом системы уравнений определяются коэффициенты.

При нахождении частных решений ЛНДУ может быть полезной следующая теорема.

**Теорема (о наложении решений).** Если правая часть ЛНДУ представляет собой сумму двух функций:  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , а  $y_{\text{чп1}}$  и  $y_{\text{чп2}}$  – частные решения уравнений  $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_ny = f_1(x)$  и  $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_ny = f_2(x)$  соответственно, то функция  $y_{\text{чп}} = y_{\text{чп1}} + y_{\text{чп2}}$  является решением данного уравнения.

**Пример 1** – Указать вид частного решения  $y'' - 5y' + 4y = (3x + 2)e^x$ .

**Решение**

Решим характеристическое уравнение  $k^2 - 5k + 4 = 0$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 4$ . Функции  $(3x + 2)e^x$  соответствует  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ;  $\alpha = 1$  является корнем характеристического уравнения кратности  $r = 1$ ; множитель при  $e^x$  равен  $(3x + 5)$  – многочлен

первой степени. Следовательно, получаем ответ: частное решение имеет вид  $y_{\text{чн}} = x(Ax + B)e^x$ .

**Пример 2** – Найти общее решение уравнения  $y'' + 4y = e^x$ .

*Решение*

Решим однородное уравнение  $y'' + 4y = 0$ :  $k^2 + 4 = 0$ ,  $k_1 = 2i$ ,  $k_2 = -2i$ ,  $y_{\text{оо}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ .

Функции  $e^x$  в правой части уравнения соответствует  $\alpha = 1, \beta = 0$ ;  $\alpha = 1$  не является корнем характеристического уравнения (кратность  $r = 0$ , коэффициент при  $e^x$  равен 1 (многочлен нулевой степени)). Следовательно, частное решение ищем в виде  $y_{\text{чн}} = Ax^0 e^x = Ae^x$ .

Находим  $A$ , подставляя  $y_{\text{чн}}$  в данное неоднородное уравнение:  $y'_{\text{чн}} = Ae^x$ ,  $y''_{\text{чн}} = Ae^x$ ,  $Ae^x + 4Ae^x = e^x$ ,  $e^x \neq 0$ ,  $A = 0,2$ .

Итак,  $y_{\text{он}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 0,2e^x$ .

**Пример 3** – Найти общее решение уравнения  $y'' - 2y' - 8y = 85 \cos x$ .

*Решение*

Решим однородное уравнение  $y'' - 2y' - 8y = 0$ :  $k^2 - 2k - 8 = 0$ ,  $k_1 = -2$ ,  $k_2 = 4$ ,  $y_{\text{оо}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}$ .

Функции  $\cos x$  соответствует  $\alpha = 0, \beta = 1$ . Число  $i$  не является корнем характеристического уравнения. Следовательно,  $y_{\text{чн}} = A \cos x + B \sin x$ . Тогда  $y'_{\text{чн}} = -A \sin x + B \cos x$ ,  $y''_{\text{чн}} = -A \cos x - B \sin x$ . Подставляя  $y$ ,  $y'$ ,  $y''$  в исходное уравнение, получим

$$\begin{aligned} -A \cos x - B \sin x + 2A \sin x - 2B \cos x - 8A \cos x - 8B \sin x &= 85 \cos x, \\ \cos x(-A - 2B - 8A) + \sin x(-B + 2A - 8B) &= 85 \cos x. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при  $\cos x$  и при  $\sin x$  слева и справа от знака равенства. Получим систему

$$\begin{cases} -9A - 2B = 85, \\ 2A - 9B = 0. \end{cases}$$

Откуда  $A = -9$ ,  $B = -2$ . Тогда  $y_{\text{чн}} = -9 \cos x - 2 \sin x$ .

Итак,  $y_{\text{он}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} - 9 \cos x - 2 \sin x$ .

**Пример 4** – Указать вид частного решения уравнения  $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(\cos x + x)$ .

*Решение*

Решим характеристическое уравнение  $k^2 + 2k + 2 = 0$ :  $k_1 = -1 + i$ ,  $k_2 = -1 - i$ . Для первого слагаемого правой части уравнения  $e^{-x} \cos x$  имеем  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$ . Число  $\alpha + \beta i = -1 + i$  является корнем характеристического уравнения кратности  $r = 1$ . Для второго слагаемого  $xe^{-x}$  имеем  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0$ . Число  $\alpha = -1$  не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, получаем ответ:  $y_{\text{чн}} = x(A \cos x + B \sin x)e^{-x} + (Cx + D)e^{-x}$ .

## 9.2 Упражнения

**1** Для данных ЛНДУ написать вид его частного решения с неопределенными коэффициентами:

1)  $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$ . *Ответ:*  $y_{\text{чн}} = (Ax^3 + Bx^2)e^{4x}$ ;

2)  $y'' + 16y = \sin 4x$ . *Ответ:*  $y_{\text{чн}} = x(A \cos 4x + B \sin 4x)$ ;

3)  $y'' - 7y' = (x - 1)^2$ . *Ответ:*  $y_{\text{чн}} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ ;

4)  $y'' + 2y' + 5y = e^x((x + 1)\cos 2x + 3\sin 2x)$ .

*Ответ:*  $y_{\text{чн}} = e^x((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x)$ ;

5)  $y'' + 4y = \cos(2x + 3)$ . *Ответ:*  $y_{\text{чн}} = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$ ;

6)  $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$ . *Ответ:*  $y_{\text{чн}} = Ax + B \cos 8x + C \sin 8x$ .

**2** Найти общие и частные решения (там, где заданы начальные условия) для следующих дифференциальных уравнений:

1)  $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ . *Ответ:*  $y_{\text{он}} = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$ ;

2)  $y'' - 8y' + 7y = 14$ . *Ответ:*  $y_{\text{он}} = C_1e^{7x} + C_2e^x + 2$ ;

3)  $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$ .

*Ответ:*  $y_{\text{он}} = C_1e^{-2x} + C_2e^x - 0,4\cos 2x - 1,2\sin 2x$ ;

4)  $y'' - 4y' + 4y = x^2$ . *Ответ:*  $y_{\text{он}} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$ ;

5)  $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ .

*Ответ:*  $y_{\text{чн}} = e^{2x} - e^{3x} + xe^{-x}$ ;

6)  $y'' - y = x^2 - x + 1$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ .

*Ответ:*  $y_{\text{чн}} = e^x + 2e^{-x} - x^2 + x - 3$ ;

$$7) y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x), \quad y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi.$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{чн}} = 3\pi \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + x(\sin 2x - \cos 2x);$$

$$8) y'' + y' = 5x + 2e^x. \quad \text{Ответ: } y_{\text{он}} = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{5}{2} x^2 - 5x + e^x;$$

$$9) y'' + y' = \sin^2 x. \quad \text{Ответ: } y_{\text{он}} = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x + \frac{1}{10} \cos 2x - \frac{1}{20} \sin 2x;$$

$$10) y'' + y = \sin x \cdot \cos 3x.$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{он}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{30} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 2x.$$

### 9.3 Домашнее задание

Найти общие и частные решения (там, где заданы начальные условия) для следующих дифференциальных уравнений:

$$1) y'' - 5y' + 6y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad \text{Ответ: } y_{\text{чн}} = \frac{1}{2} e^{3x} - e^{2x} + \frac{1}{2} e^x;$$

$$2) y'' - 4y' + 4y = x e^{2x}. \quad \text{Ответ: } y_{\text{он}} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{6} x^3 e^{2x};$$

$$3) 2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1. \quad \text{Ответ: } y_{\text{он}} = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{5} x + \frac{7}{25} x;$$

$$4) y'' + y = -\sin 2x, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 1.$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{чн}} = -\cos x - \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x;$$

$$5) y'' + 4y = x \sin 2x.$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{он}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x^2}{8} \cos 2x + \frac{x}{16} \sin 2x;$$

$$6) y'' - 3y' + 2y = 3x + 5 \sin 2x.$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{он}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x.$$

## 10 Дополнительные задачи по теме «Дифференциальные уравнения высших порядков»

### 10.1 Упражнения

Найти общие и частные решения (там, где заданы начальные условия) для следующих дифференциальных уравнений:

$$1) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{он}} = C_1 e^x + C_2 x e^x - \ln \sqrt{x^2 + 1} + x \operatorname{arctg} x;$$

$$2) y'' = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0. \quad \text{Ответ: } y = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x - x + 1);$$

$$3) (1 - x^2)y'' - xy' = 2. \quad \text{Ответ: } y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2;$$

$$4) y'' - 5y' + 4y = \sin x - 7 \cos x.$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{он}} = C_1 e^x + C_2 x e^{4x} + \frac{19}{17} \sin x - \frac{8}{17} \cos x;$$

$$5) y'' \operatorname{tg} x = y' + 1. \quad \text{Ответ: } y = -x - C_1 \cos x + C_2;$$

$$6) xy'' - y' = 2x^2 e^x. \quad \text{Ответ: } y = 2x e^x - 2e^x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2;$$

$$7) y'' + 4y' = \cos 2x. \quad \text{Ответ: } y = \frac{1}{10} \sin 2x - \frac{1}{20} \cos 2x - \frac{C_1 e^{-4x}}{4} + C_2;$$

$$8) yy'' + y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \quad \text{Ответ: } y = \sqrt{2x + 1};$$

$$9) y'' = 2 - y, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2. \quad \text{Ответ: } \arcsin \frac{y - 2}{2} = x;$$

$$10) y'' + 4y' + 20y = 0. \quad \text{Ответ: } y = e^{-2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x);$$

$$11) y'' - 3y' - 10y = 0. \quad \text{Ответ: } y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x};$$

$$12) 9y'' + 6y' + y = 0. \quad \text{Ответ: } y = C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 x e^{-\frac{x}{3}};$$

$$13) y''' - 13y'' + 12y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 133.$$

$$\text{Ответ: } y = 10 - 11e^x + e^{12x};$$

$$14) y'' + y' = 2x - 1. \quad \text{Ответ: } y = C_1 + C_2 e^{2x} + x^2 - 3x;$$

$$15) y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}. \quad \text{Ответ: } y = C_1 e^{6x} + C_2 x e^{6x} + 7x^2 e^{6x};$$

$$16) y'' - 3y' + 2y = 3 \cos x + 19 \sin x.$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 6 \cos x + \sin x;$$

$$17) y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}. \quad \text{Ответ: } y = e^{4x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^{2x};$$

$$18) y'' + 4y' + 20y = 4 \cos 4x - 52 \sin 4x.$$

$$\text{Ответ: } y = e^{-2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + 3 \cos 4x - \sin 4x;$$

$$19) y'' + 6y = e^x (\cos 4x - 8\sin 4x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$$

$$\text{Ответ: } y = \sin 4x - \cos 4x + e^x \cos 4x;$$

$$20) y'' - y' = e^{2x} \sin e^x. \quad \text{Ответ: } y = C_1 + C_2 e^x - \sin e^x;$$

$$21) y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}.$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + e^x \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| - e^{-x} \ln |e^x - 1| - 1.$$

## 11 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

### 11.1 Теоретическая часть

**Нормальной системой ДУ** называется система вида

$$\begin{cases} y_1' = \varphi_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = \varphi_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \quad (11.1)$$

**Теорема Коши.** Если функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  в системе (11.1) и их частные производные по  $y_1, \dots, y_n$  определены и непрерывны в некоторой области  $D$  пространства переменных  $(x, y_1, \dots, y_n)$ , то какова бы ни была внутренняя точка  $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$  области  $D$ , в некоторой её окрестности существует единственное решение системы (11.1), удовлетворяющее начальным условиям  $y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}$ .

Нормальная система называется **линейной** (ЛСДУ), если функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  являются линейными относительно  $y_1, \dots, y_n$ .

В противном случае система нелинейна.

ЛСДУ имеет вид:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases}$$

или кратко

$$y_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j + f_i(x), \quad i = \overline{1, n}. \quad (11.2)$$

Систему (11.2) можно записать в матричной форме:

$$Y' = AY + F, \quad (11.3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Система (11.3) называется *линейной однородной* (ЛОСДУ), если  $F \equiv 0$ , иначе система *неоднородная*.

## 11.2 Методы решения нормальных систем

**Метод исключения** заключается в следующем: дифференцированием одного из уравнений системы (11.1) и исключением неизвестных функций удастся свести систему к одному уравнению  $n$ -го порядка относительно одной функции.

**Пример 1** – Решить методом исключения СДУ 
$$\begin{cases} y'_1 = 4y_1 - 3y_2, \\ y'_2 = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

*Решение*

Продифференцируем первое уравнение системы. Получим

$$\begin{cases} y''_1 = 4y'_1 - 3y'_2, \\ y'_2 = 3y_1 + 4y_2, \\ y_2 = \frac{1}{3}(4y_1 - y'_1). \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение второе и третье уравнения системы, исключив переменную  $y_2$  и ее производную  $y'_2$ . Имеем уравнение  $y''_1 - 8y'_1 + 25y_1 = 0$ , решив которое, получим  $y_1 = e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ .

Найдем  $y_2$  из третьего уравнения системы:

$$\begin{aligned} y'_1 &= 4e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{4x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) = \\ &= e^{4x}((4C_1 + 3C_2)\cos 3x + (4C_2 - 3C_1)\sin 3x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2 &= \frac{1}{3} \left( 4e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - e^{4x} \left( (4C_1 + 3C_2) \cos 3x + (4C_2 - 3C_1) \sin 3x \right) \right) = \\
 &= e^{4x} (C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x).
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y_1 = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x), \\ y_2 = e^{4x} (C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x). \end{cases}$$

**Метод интегрируемых комбинаций** заключается в следующем: путем алгебраических преобразований уравнений системы (11.1) удастся в некоторых случаях получить легко интегрируемые комбинации, после чего нетрудно решить систему.

**Пример 2** – Решить методом интегрируемых комбинаций СДУ

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{yz}, \\ z' = \frac{x}{y^2}. \end{cases}$$

*Решение*

$y' = \frac{dy}{dx}; z' = \frac{dz}{dx}$ . Разделим первое уравнение системы на второе, получим

$\frac{dy}{dz} = \frac{y}{z} \Rightarrow y = C_1 z$ . Подставим полученную функцию во второе уравнение системы:

$$\text{мы: } z' = \frac{x}{C_1^2 z^2}. \text{ Имеем } C_1^2 z^2 dz = x dx \Rightarrow \frac{C_1^2 z^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C_2.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y = C_1 z, \\ \frac{C_1^2 z^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C_2. \end{cases}$$

## 11.2 ЛОСДУ с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера (метод характеристического уравнения)

Рассмотрим ЛОСДУ

$$Y' = AY, \quad (11.4)$$

где  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ ,  $Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}$ .

Общее решение ЛОСДУ (11.4) имеет вид  $Y = \sum_{i=1}^n c_i Y_i$ , где  $Y_i$  – фундаментальная система решений (11.4).

$Y_i$  ищем в виде (предложил Эйлер)  $Y_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{kx} \\ \alpha_2 e^{kx} \\ \dots \\ \alpha_n e^{kx} \end{pmatrix} = e^{kx} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ .

Требуется подобрать  $\alpha_i$  так, чтобы  $Y_i$  удовлетворяло системе (11.4).

$$Y'_i = ke^{kx} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow ke^{kx} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \cdot e^{kx} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^{kx} \cdot (A - kE) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(A - kE) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 - \text{однородная СЛАУ относительно } \alpha_i. \text{ Она имеет ненулевое}$$

решение, если  $\det(A - kE) = 0$ . Получаем характеристическое уравнение

$$\det(A - kE) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (11.5)$$

Частные решения системы (11.4) в зависимости от корней характеристического уравнения (11.5) представлены в таблице 11.1.

Таблица 11.1 – Частные решения системы в зависимости от корней характеристического уравнения

Корни характеристического уравнения (11.5)	Частные решения системы (11.4)
$k_i \in \mathbb{R}$ , кратность $r = 1$	$Y_i = e^{k_i x} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$
$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ , кратность $r = 1$	$Y_i^1 = \operatorname{Re} Y^*, \quad Y_i^2 = \operatorname{Im} Y^*, \quad Y^* = e^{(\alpha + \beta i)x} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$
$k_i \in \mathbb{R}$ , кратность $r \geq 2$	$Y_i = e^{k_i x} \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12}x + \dots + \alpha_{1r}x^{r-1} \\ \alpha_{21} + \alpha_{22}x + \dots + \alpha_{2r}x^{r-1} \\ \dots \\ \alpha_{n1} + \alpha_{n2}x + \dots + \alpha_{nr}x^{r-1} \end{pmatrix},$ <p>где <math>\alpha_{ij}</math> (<math>i = \overline{1, n}; j = \overline{1, r}</math>) определяются из системы линейных уравнений, получающейся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях <math>x</math> в результате подстановки <math>Y_i</math> в исходную систему (11.5)</p>

**Пример 3** – Решить методом Эйлера систему  $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$

*Решение*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:  $\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 4; k_2 = 1.$$

$$\text{Имеем } Y_1 = e^{4x} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}; Y_2 = e^x \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение ищем в виде  $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$ .

$$k_1 = 4: \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \Rightarrow Y_1 = e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$k_1 = 1: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta_1 + 2\beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_1 = -2\beta_2 \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = 1, \\ \beta_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow Y_2 = e^x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } Y = C_1 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} y_1 = C_1 e^{4x} - 2C_2 e^x, \\ y_2 = C_1 e^{4x} + C_2 e^x. \end{cases}$$

**Пример 4** – Решить методом Эйлера систему  $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 3y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$

*Решение*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-k & -3 \\ 3 & 4-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 4-k & -3 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-k)^2 = -9 \Rightarrow k_{1,2} = 4 \pm 3i. \text{ Имеем } Y_1 = \operatorname{Re} Y^*; Y_2 = \operatorname{Im} Y^*.$$

Общее решение ищем в виде  $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$ .

$$k_1 = 4 + 3i: \begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3\alpha_1 - 3i\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = i\alpha_2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 1, \\ \alpha_1 = i \end{cases} \Rightarrow$$

$$Y^* = e^{(4+3i)x} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{4x} (\cos 3x + i \sin 3x) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{4x} \begin{pmatrix} i \cos 3x - \sin 3x \\ \cos 3x + i \sin 3x \end{pmatrix} = e^{4x} \begin{pmatrix} -\sin 3x \\ \cos 3x \end{pmatrix} +$$

$$+ i e^{4x} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix}. \text{ Имеем } Y_1 = e^{4x} \begin{pmatrix} -\sin 3x \\ \cos 3x \end{pmatrix}; Y_2 = e^{4x} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } Y = C_1 e^{4x} \begin{pmatrix} -\sin 3x \\ \cos 3x \end{pmatrix} + C_2 e^{4x} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} y_1 = e^{4x} (-C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x), \\ y_2 = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \end{cases}$$

**Пример 5** – Решить методом Эйлера систему  $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 6y_2. \end{cases}$

*Решение*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-k & -1 \\ 4 & 6-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:  $\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 4 & 6-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$k^2 - 8k + 16 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 4. \text{ Имеем } Y_1 = e^{4x} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}; Y_2 = xe^x \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение ищем в виде  $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$ .

$$1) Y' = AY \Rightarrow 4e^{4x} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} e^{4x} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \\ 4\alpha_2 = 4\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = -2\alpha_1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ \alpha_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow Y_1 = e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$2) Y' = AY \Rightarrow 4xe^{4x} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + e^{4x} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} xe^{4x} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta_2 = -2\beta_1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x\beta_1 + \beta_1 = 2x\beta_1 - x\beta_2, \\ 4x\beta_2 + \beta_2 = 4x\beta_1 + 6x\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1, \\ \beta_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow Y_2 = xe^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } Y = e^{4x} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 x \\ -2C_1 - 2C_2 x \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} y_1 = e^{4x} (C_1 + C_2 x), \\ y_2 = e^{4x} (-2C_1 - 2C_2 x). \end{cases}$$

#### 11.4 ЛНСДУ с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим ЛНСДУ

$$Y' = AY + F, \quad F \neq 0. \quad (11.6)$$

Общее решение  $Y_{он}$  ЛНСДУ (11.6) имеет вид  $Y_{он} = Y_{оо} + Y_{чн}$ , где  $Y_{оо}$  – общее решение ЛОСДУ;  $Y_{чн}$  – частное решение ЛНСДУ (11.6).

$$Y_{оо} = \sum_{i=1}^n C_i Y_i, \text{ где } Y_i \text{ – фундаментальная система решений ЛОСДУ, } i = \overline{1, n}.$$

$$Y_{чн} = \sum_{i=1}^n C_i(x) Y_i. \text{ Подставляя его в ЛНСДУ (11.6) и учитывая, что } Y_i' = AY_i,$$

получим систему

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x) Y_i = F. \quad (11.7)$$

Из этой системы находим  $C_i'(x)$ , затем  $C_i(x)$ .

**Пример 6** – Решить методом вариации произвольных постоянных систему

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2 + x. \end{cases}$$

*Решение*

Рассмотрим однородную систему:  $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:  $\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$(1-k)^2 = 1 \Rightarrow k_1 = 0; k_2 = 2. \text{ Имеем } Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}; Y_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение ищем в виде  $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$ .

$$k_1 = 0: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 1, \\ \alpha_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$k_2 = 2: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\beta_1 + \beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 1 \Rightarrow Y_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Y_{oo} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение исходной неоднородной системы ищем в виде

$$Y_{\text{чн}} = C_1(x) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(x) e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}. \text{ Из системы (11.7) имеем } C_1'(x) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2'(x) e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} -C_1'(x) + C_2'(x) e^{2x} = 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x) e^{2x} = x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = \frac{x}{2}, \\ C_2'(x) = \frac{x e^{-2x}}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int \frac{x}{2} dx, \\ C_2(x) = \int \frac{x e^{-2x}}{2} dx; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1(x) = \frac{x^2}{4}, \\ C_2(x) = \left( -\frac{x}{4} - \frac{1}{8} \right) e^{-2x}. \end{cases}$$

$$Y_{\text{чи}} = \frac{x^2}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right) e^{-2x} \cdot e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x^2}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение исходной неоднородной системы имеет вид  $Y_{\text{он}} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### 11.5 Упражнения

**1** Решить системы дифференциальных уравнений методом исключений или методом интегрируемых комбинаций:

- 1)  $\begin{cases} y'_x = z, \\ z'_x = -y. \end{cases}$       *Ответ:*  $\begin{cases} y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x; \end{cases}$
- 2)  $\begin{cases} y'_x = y + 5z, \\ z'_x + y + 3z = 0. \end{cases}$       *Ответ:*  $\begin{cases} y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \\ z = \frac{e^{-x}}{5} ((C_2 - 2C_1) \cos x - (C_1 + 2C_2) \sin x); \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} y'_x = -3y - z, \\ z'_x = y - z. \end{cases}$       *Ответ:*  $\begin{cases} y = e^{-2x} (C_2 - C_1 - C_2 x), \\ z = e^{-2x} (C_1 + C_2 x); \end{cases}$
- 4)  $\begin{cases} y'_x = \frac{y^2}{z}, \\ z'_x = \frac{1}{2} y. \end{cases}$       *Ответ:*  $\begin{cases} y = \frac{2C_1}{(C_1 x + C_2)^2}, \\ z = -\frac{1}{C_1 x + C_2}; \end{cases}$
- 5)  $\begin{cases} y'_x = -z, \\ z'_x = \frac{z^2}{y} \end{cases}$  при  $\begin{cases} y(1) = 1, \\ z(1) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$       *Ответ:*  $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ z = -\frac{1}{2\sqrt{x}}; \end{cases}$
- 6)  $\begin{cases} y'_x = y + z, \\ z'_x = x + y + z. \end{cases}$       *Ответ:*  $\begin{cases} y = C_1 e^{2x} + C_2 - \frac{x^2 + x}{4}, \\ z = C_1 e^{2x} - C_2 + \frac{x^2 - x - 1}{4}. \end{cases}$

**2** Решить системы дифференциальных уравнений методом Эйлера:

- 1)  $\begin{cases} x'_t = 6x - y, \\ y'_t = 3x + 2y. \end{cases}$       *Ответ:*  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$
- 2)  $\begin{cases} x'_t = 2x + y, \\ y'_t = -6x - 3y. \end{cases}$       *Ответ:*  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$
- 3)  $\begin{cases} x'_t = -7x + y, \\ y'_t = -2x - 5y. \end{cases}$       *Ответ:*  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-6t} \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ (C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t \end{pmatrix};$

$$4) \begin{cases} x'_t = 2x - y + z, \\ y'_t = x + 2y - z, \\ z'_t = x - y + 2z. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{cases} x'_t = -y + z, \\ y'_t = z, \\ z'_t = -x + z \end{cases} \quad \text{при } \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = \frac{1}{2}, \\ z(0) = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t, \\ y = \frac{1}{2} (\cos t + \sin t), \\ z = \frac{1}{2} (\cos t - \sin t); \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x'_t = 2x - 5y, \\ y'_t = 5x - 6y. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t \\ (4C_1 - 3C_2) \cos 3t + (3C_1 + 4C_2) \sin 3t \end{pmatrix}.$$

**3** Решить системы дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных:

$$1) \begin{cases} x'_t = x - y, \\ y'_t = x + y + e^t. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{cases} x = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t - 1), \\ y = e^t (C_1 \sin t - C_2 \cos t); \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x'_t = y + t g^2 t - 1, \\ y'_t = -x + t g t. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t g t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2. \end{cases}$$

### 11.6 Домашнее задание

Решить системы дифференциальных уравнений:

$$1) \begin{cases} x'_t = 8x - 3y, \\ y'_t = 2x + y. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$2) \begin{cases} x'_t = x + y, \\ y'_t = -2x + 3y. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ (C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{cases} y'_x + 2y + z = \sin x, \\ z'_x - 4y - 2z = \cos x. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{cases} y = 2 \sin x + C_1 x + C_2, \\ z = -3 \sin x - 2 \cos x - 2C_1 x - 2C_2 - C_1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x'_t = \frac{y^2}{x}, \\ y'_t = \frac{x^2}{y}. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} (C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}), \\ y^2 = \frac{1}{2} (C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}); \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x'_t = y + z, \\ y'_t = 3x + z, \\ z'_t = 3x + y. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$6) \begin{cases} x'_t = 3x - 2y + t, \\ y'_t = 3x - 4y. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{2t} - \frac{2}{3}t - \frac{5}{18}, \\ y = 3C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{12}. \end{cases}$$

### Список литературы

- 1 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов / Н. С. Пискунов. – Москва: Наука, 1985. – Т. 2.
- 2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 2.
- 3 **Гусак, А. А.** Высшая математика / А. А. Гусак. – Минск: Тетра-Системс, 1998. – Т. 2.
- 4 Руководство к решению задач по высшей математике: учебное пособие для вузов / Под ред. Е. И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 2.
- 5 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 2.
- 6 Сборник задач по курсу высшей математики: учебное пособие для вузов / Под ред. Г. И. Кручковича. – Москва: Высшая школа, 1973.
- 7 Сборник задач по математике для вузов / Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – Москва: Альянс, 2010. – Ч. 2.