ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Методические рекомендации к самостоятельной работе студентов, обучающихся по белорусским и российским образовательным программам, дневной и заочной форм обучения

Могилев 2016

УДК 517
ББК 22.1
А 45

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «31» мая 2016 г., протокол № 9

Составители: Л. В. Варфоломеева;
Е. Г. Галуза;
Л. И. Сотская;
С. А. Скрыган

Рецензент И. Д. Камчицкая

В методических рекомендациях приведены варианты индивидуальных заданий для студентов, обучающихся по белорусским и российским образовательным программам, дневной и заочной форм обучения.

Учебно-методическое издание

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка И. Н. Береснева

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

1 Определители и системы

1 Вычислите определитель третьего порядка двумя способами.

1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$

2 $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 11 & 3 & 4 \\ 11 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$

3 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$

4 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$

5 $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$

6 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$

7 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{vmatrix}.$

8 $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$

9 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

10 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

11 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$

12 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$

13 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$

14 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$

15 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$

16 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$

17 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$

18 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$

19 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

20 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

21 $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

22 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$

23 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$

24 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}.$

25 $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}.$

26 $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$

27 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$

28 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$

29 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

30 $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

2 Решите систему уравнений по формулам Крамера и матричным способом.

1 $\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + 2y + 4z = 13, \\ 5x + y + 2z = 2, \\ 3x - y + z = 2. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 2x + y - 2z = 3, \\ 4x + y + 4z = -1. \end{cases}$

4 $\begin{cases} 5x + 6y - 2z = 18, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 4x - 3y + 2z = 9. \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x - y + 2z = -4, \\ x + y + 2z = -1, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x - y - 2z = 1, \\ 3x + 3y + z = -6, \\ x + 3y + 3z = 0. \end{cases}$

7 $\begin{cases} 3x - y + z = 4, \\ 2x - 5y - 3z = -17, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$

8 $\begin{cases} x + 5y + z = -7, \\ 2x - y - z = 0, \\ x - 2y - z = 2. \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x + y + 4z = 20, \\ 2x - y - 3z = 3, \\ 3x + 4y - 5z = -8. \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ 3x + 4y - 2z = 5, \\ 3x - 2y + 4z = 5. \end{cases}$

11 $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x - 2y + 4z = 4, \\ 3x + y - z = 3. \end{cases}$

12 $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y + z = 1, \\ 3x + y - z = 4. \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

14 $\begin{cases} 3x - y + 5z = 0, \\ 4x - 3y + 2z = -1, \\ -5x + y + 3z = -7. \end{cases}$

15 $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - 2y + 3z = 4, \\ -2x + 2y + 3z = 11. \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ x + y + z = 6, \\ 3x - y + z = 4. \end{cases}$

17 $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

18 $\begin{cases} x + 5y - z = 7, \\ 2x - y - z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

19 $\begin{cases} 7x + 5y + 2z = 18, \\ x - y - z = 3, \\ x + y + 2z = -2. \end{cases}$

20 $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 6z = -1, \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$

21 $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 16, \\ 3x - 2y - 5z = 12. \end{cases}$

22 $\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

23 $\begin{cases} x - 2y - 2z = 3, \\ x + y - 2z = 0, \\ x - y - z = 1. \end{cases}$

24 $\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3, \\ 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1. \end{cases}$

25 $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ -2x + y + z = 0, \\ 2x - y + 4z = 15. \end{cases}$

26 $\begin{cases} 2x - y - 3z = 3, \\ 3x + 4y - 5z = 8, \\ 2y + 7z = 17. \end{cases}$

27 $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7, \\ x + 3y - 2z = 0, \\ 2y - z = 2. \end{cases}$

28 $\begin{cases} 11x + 3y - z = 2, \\ 2x + 5y - 5z = 0, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

29 $\begin{cases} x - 2y + z = 15, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ x + 3y + 2z = -6. \end{cases}$

30 $\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ 3x - y + 2z = 7, \\ x + 2y + 3z = 14. \end{cases}$

3 Вычислите определитель 4-го порядка, используя свойства определителя.

1 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & -13 & 1 \end{vmatrix}.$

2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

3 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$

4 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$

5 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$

6 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

7 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

8 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$.

9 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

10 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

11 $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

12 $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

13 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

14 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

15 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$.

16 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$.

17 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

18 $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

19 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

20 $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

21 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

22 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 6 & -3 \end{vmatrix}$.

23 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

24 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

25 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

26 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

27 $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

28 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

29 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

30 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

2 Матрицы

1 Выполните действия (3A + B)·(2B – A) над матрицами A и B.

1 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&-2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-2&2&-1\\-3&1&-3\end{pmatrix}$.

2 $A=\begin{pmatrix}4&1&4\\-1&-2&-1\\2&-1&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

3 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&1&-2\\-3&1&0\end{pmatrix}$.

4 $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\0&-1&2\\5&7&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&-1\\2&-1&2\\-3&1&4\end{pmatrix}$.

5 $A=\begin{pmatrix}7&-3&0\\1&-1&0\\2&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4&2&1\\1&0&1\\3&2&1\end{pmatrix}$.

6 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&1&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&5\\4&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$.

7 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&5&3\\3&7&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-3&2&1\\1&3&-1\end{pmatrix}$.

8 $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\6&6&5\\-1&2&11\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&5\\4&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$.

9 $A=\begin{pmatrix}2&0&3\\2&1&-1\\-1&0&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3&2\\1&3&5\\3&2&1\end{pmatrix}$.

10 $A=\begin{pmatrix}2&5&-6\\1&-2&5\\1&3&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{pmatrix}$.

11 $A=\begin{pmatrix}4&5&6\\-1&0&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&-1&-2\\3&1&2\end{pmatrix}$.

12 $A=\begin{pmatrix}3&4&5\\-1&0&2\\-2&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&1&2\\3&-1&0\end{pmatrix}$.

13 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\-1&2&0\\2&3&-1\end{pmatrix}$.

14 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\2&1&1\\-2&1&-1\end{pmatrix}$.

15 $A=\begin{pmatrix}2&5&-1\\0&2&1\\1&7&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\-1&2&0\\2&3&-1\end{pmatrix}$.

16 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\5&1&-1\\1&11&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\2&1&1\\-2&1&-1\end{pmatrix}$.

17 $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

18 $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

19 $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 16\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$.

20 $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & 8 & 7\\ 2 & 7 & 3\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

21 $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 16\\ -3 & -2 & 0\\ 6 & 7 & 2\end{pmatrix}$.

22 $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & 8 & 7\\ 2 & 7 & 3\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

23 $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 5 & -7 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

24 $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 6\\ 1 & -1 & 3\\ 4 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

25 $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

26 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}22 & -14 & 3\\ 6 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

27 $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 13\\ -1 & 0 & 5\\ 5 & 13 & 21\end{pmatrix}$.

28 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix}$.

29 $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 10 & 4 & 1\\ 7 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 6 & -2\\ 4 & 10 & 1\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}$.

30 $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3\\ 1 & 6 & 1\\ 2 & 2 & 16\end{pmatrix}$.

2 Исследуйте на совместность систему линейных алгебраических уравнений по теореме Кронекера-Капелли. В случае совместности решите систему методом Гаусса.

1 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1,\\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4,\\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -8,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4.\end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6,\\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8,\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4,\\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8.\end{cases}$

3 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 9x_2 - 5x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 7x_4 = 11. \end{cases}$

10 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 8, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$

4 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$

11 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

5 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 = -3. \end{cases}$

12 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

6 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

13 $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 - 3x_3 + 4x_4 = -5. \end{cases}$

7 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -1. \end{cases}$

14 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

8 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 - 12x_4 = 16. \end{cases}$

15 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9, \\ 3x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$

9 $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

18 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

19 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7, \\ 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

20 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

21 $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

22 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

23 $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

24 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

25 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$

26 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

27 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = -9, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16, \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

28 $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

29 $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

30 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -15. \end{cases}$

3 Векторы

3.1 Линейные операции над векторами

1 На плоскости даны два вектора $\vec{a}=(2;-3)$ и $\vec{b}=(1;2)$. Найдите разложение вектора $\vec{q}=(9;4)$ по базису $\{\vec{a},\vec{b}\}$.

2 Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найдите его четвертую вершину D.

3 Даны вершины четырехугольника $ABCD$: $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Докажите, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

4 В четырехугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{n}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{p}$. Найдите разложение вектора $\overrightarrow{EF}$ по векторам $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, где E и F – середины диагоналей AC и BD.

5 Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{ED}$ по векторам $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{q}=\overrightarrow{AF}$.

6 Дана трапеция $ABCD$, у которой основание AB в 2 раза больше основания CD. Точки M и N – середины оснований. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ по векторам $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

7 В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CK. Докажите, что $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$.

8 Точка O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ по векторам $\vec{p}=\overrightarrow{OE}$, $\vec{q}=\overrightarrow{OF}$.

9 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $\overrightarrow{B_1A_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b}$, $\overrightarrow{B_1B}=\vec{c}$. Разложите вектор $\overrightarrow{B_1M}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, где M – точка пересечения AC и BD.

10 Дан параллелограмм $ABCD$, $K\in AB$, $AK=KB$, $L\in DC$, $\left|\overrightarrow{CL}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{DL}\right|$. Выразите вектор $\overrightarrow{KL}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

11 Дан параллелограмм $ABCD$, $K\in BC$, $BK=KC$, $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{n}$. Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

12 Дан параллелограмм $KLMN$, $A\in MN$, $MA:AN=1:2$, $\overrightarrow{KL}=\vec{a}$, $\overrightarrow{KN}=\vec{b}$. Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

13 Даны три вектора $\vec{a}=(5;4)$, $\vec{b}=(-3;0)$, $\vec{c}=(19;8)$. Найдите разложение вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

14 Найдите разложение вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(4;-2)$, $\vec{b}=(3;5)$ и $\vec{c}=(1;-7)$.

15 В ромбе $ABCD$ за базисные взяты векторы $\overrightarrow{AC}=\vec{l}_1$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{l}_2$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ в этом базисе.

16 На трех некомпланарных векторах $\overrightarrow{AB}=\vec{l}_1$, $\overrightarrow{AD}=\vec{l}_2$ и $\overrightarrow{AA_1}=\vec{l}_3$ построен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$ в базисе $\left\{\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3\right\}$.

17 В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{l}_1$ и $\overrightarrow{AE}=\vec{l}_2$ выбраны в качестве базисных. Найдите в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF}$.

18 Пусть $\left\{\vec{l}_1,\vec{l}_2\right\}$ – произвольный базис на плоскости. Диагонали параллелограмма построены на векторах $\vec{a}=\vec{l}_1+\vec{l}_2$ и $\vec{b}=\vec{l}_1-2\vec{l}_2$. Найдите координаты этих диагоналей.

19 Докажите, что точки $A(3;-1;1)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$ являются вершинами трапеции.

20 Дан тетраэдр $ABCD$. $K\in BC$, $CK=KB$, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Выразите вектор $\overrightarrow{DK}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

21 На плоскости даны два вектора $\vec{p}=(2;-3)$ и $\vec{q}=(1;2)$. Найдите разложение вектора $\vec{a}=(9;4)$ по базису $\{\vec{p},\vec{q}\}$.

22 Даны точки $A(-1;5;-10)$, $B(5,-7,8)$, $C(2;2;-7)$, $D(5;-4;2)$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Установите, длина которого из них больше и во сколько раз. Определите, как они направлены – противоположно или сонаправленно?

23 Даны три вектора $\vec{a}=(3;1)$, $\vec{b}=(1;-2)$, $\vec{c}=(-1;7)$. Найдите разложение вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по базису $\left\{\vec{a},\vec{b}\right\}$.

24 На плоскости даны четыре точки $A(1;-2)$, $B(2;1)$, $C(3;2)$, $D(-2;3)$. Определите разложение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$, принимая в качестве базисных $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

25 В ромбе $ABCD$ даны диагонали $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$. Разложите по этим двум векторам все векторы, которые совпадают с медианами $\triangle ABC$.

26 Даны три вектора $\vec{p}=(3;-2;1)$, $\vec{q}=(-1;1;-2)$, $\vec{r}=(2;1;-3)$. Найдите разложение вектора $\vec{c}=(11;-6;5)$ по базису $\{\vec{p},\vec{q},\vec{r}\}$.

27 Векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ образуют треугольник ABC. Выразите через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$, которые совпадают с медианами треугольника ABC.

28 Проверьте, является ли четырехугольник с вершинами в точках $A(1;1;1)$, $B(4;4;1)$, $C(7;1;1)$, $D(4;-2;1)$ квадратом.

29 Дан треугольник с вершинами $A(7;5;-4)$, $B(4;9;1)$, $C(6;-3;-7)$. Вычислите длину медианы, проведенной из вершины A.

30 Найдите длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(3;-5;8)$, $\vec{b}=(-1;1;-4)$.

3.2 Скалярное произведение двух векторов и его свойства

1 Какой угол образуют одинаковой длины векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{s}=\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{q}=5\vec{a}-4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?

2 Даны вершины треугольника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;2;0)$, $C(3;-2;1)$. Определите его внешний угол при вершине A.

3 Найдите $np_{\vec{b}}\vec{a}$, если $\vec{a}=-4\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

4 Найдите $np_{\vec{a}}\vec{b}$, если $\vec{a}=(4;-3;2)$, $\vec{b}=(1;1;1)$.

5 В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Вычислите $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}$.

6 Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(1;1;-2)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a}=3$.

7 Найдите такое значение α, чтобы косинус угла между векторами $\vec{p}=\vec{i}+2\vec{j}+\alpha\vec{k}$ и $\vec{q}=3\vec{i}+\vec{j}$ был равен $5/12$.

8 Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(2;1;0)$, $\vec{b}=(0;-2;1)$.

9 Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна c. Вычислите сумму $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

10 Найдите угол между векторами $\vec{a}=2\vec{l}_1-\vec{l}_2+2\vec{l}_3$ и $\vec{b}=4\vec{l}_1+\vec{l}_2-3\vec{l}_3$, если $|\vec{l}_1|=1$, $|\vec{l}_2|=2$, $|\vec{l}_3|=3$, $(\vec{l}_1,\vec{l}_2)=(\vec{l}_1,\vec{l}_3)=60^\circ$, $(\vec{l}_2,\vec{l}_3)=90^\circ$.

11 Найдите угол между векторами $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}-$ единичные векторы и угол между ними 120°.

12 Дан вектор $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}$, $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\vec{n})=120^\circ$. Найдите $\cos(\vec{a},\vec{m})$ и $\cos(\vec{a},\vec{n})$.

13 Вычислите длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы, угол между которыми 60°.

14 Даны компланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите длину вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, если известно, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=5$, $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{c})=60^\circ$.

15 Вычислите угол между векторами $\vec{a}=\vec{m}-2\vec{n}-\vec{p}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}+\vec{p}$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

16 Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a},\vec{b})=60^{\circ}$, вычислите $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)$.

17 Вычислите угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{p}=12\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

18 Вычислите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{q}=\vec{m}-2\vec{k}+3\vec{p}$, где $\vec{m}$, $\vec{k}$, $\vec{p}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

19 Вычислите длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=3$, $(\vec{p},\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}$.

20 Даны три вектора $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(5;1;2)$, $\vec{c}=(-3;0;1)$. Найдите вектор $\vec{x}$, который удовлетворяет условиям: $\vec{a}\cdot\vec{x}=-4$, $\vec{b}\cdot\vec{x}=5$, $\vec{c}\cdot\vec{x}=2$.

21 Зная разложение вектора $\vec{q}=6\vec{m}-2\vec{n}+3\vec{p}$ по трем перпендикулярным ортам, вычислите длину вектора $\vec{q}$ и углы, которые он образует с каждым из ортов $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$.

22 Зная векторы, которые образуют треугольник $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-6\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}+7\vec{b}$ и $\overrightarrow{CA}=3\vec{a}-\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – взаимно перпендикулярные орты, вычислите углы этого треугольника.

23 Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$, вычислите, при каком значении α векторы $\vec{p}=\alpha\cdot\vec{a}+17\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ будут перпендикулярны.

24 Какой угол образуют единичные векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если известно, что $\vec{p}=\vec{s}+2\vec{t}$ и $\vec{q}=5\vec{s}-4\vec{t}$ взаимно перпендикулярные векторы?

25 Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ и $D(-5;-5;3)$. Докажите, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

26 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\dfrac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, вычислите угол α между векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

27 Вычислите, при каком значении α векторы $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\alpha\cdot\vec{k}$ и $\vec{b}=\alpha\cdot\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ перпендикулярны.

28 Дан треугольник с вершинами $A(4;3;-1)$, $B(6;2;0)$, $C(2;-1;2)$. Докажите, что внутренние углы при вершинах A и B равны между собой.

29 Даны векторы $\vec{a}=(1;2;2)$, $\vec{b}=(4;-2;-5)$, $\vec{c}=(6;-1;3)$. Найдите вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям: $\vec{a}\cdot\vec{x}=3$, $\vec{b}\cdot\vec{x}=5$, $\vec{c}\cdot\vec{x}=1$.

30 Даны векторы $\vec{a}=7\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$. Вычислите $пр_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

3.3 Векторное произведение двух векторов и его свойства

1 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол в 60°. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}+2\vec{b}$ и $2\vec{a}-3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$.

2 Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$. Найдите векторное произведение $(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$.

3 Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=6\vec{a}-3\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD}=3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a},\vec{b})=30^{\circ}$.

4 Вычислите площадь параллелограмма, диагонали которого определяют векторы $\vec{p}=3\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{q}=\vec{m}-5\vec{n}$, если $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\vec{n})=45^{\circ}$

5 Даны $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$. Вычислите $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

6 Зная векторы $\overrightarrow{AB}=(-3;-2;6)$ и $\overrightarrow{BC}=(-2;4;4)$, вычислите длину высоты AD треугольника ABC.

7 Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=6$, $(\vec{a},\vec{b})=45^{\circ}$.

8 Даны $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=15$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$. Вычислите $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

9 При каком значении коэффициента α векторы $\vec{p}=\alpha\cdot\vec{a}+5\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ будут коллинеарными, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны?

10 Найдите вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(2;-3;1)$ и $\vec{b}=(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$.

11 Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=(4;-2;-3)$, $\vec{b}=(0;1;3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}|=26$, найдите его координаты.

12 Вектор $\vec{m}$, перпендикулярный оси Oz и вектору $\vec{a}=(8;-15;3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{m}|=5$, найдите его координаты.

13 Вычислите синус угла между векторами $\vec{a}=\left(2;-2;1\right)$ и $\vec{b}=(2;3;6)$.

14 Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Вычислите длину его высоты, проведенной из вершины B к стороне AC.

15 Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=(2;3;-1)$ и $\vec{b}=(1;-1;3)$, образует с вектором $\vec{i}$ тупой угол. Зная, что $|\vec{x}|=\sqrt{138}$, найдите координаты $\vec{x}$.

16 Даны точки $A(1;2;0), B(3;0;3)$, $C(5;2;6)$. Вычислите площадь $\triangle ABC$.

17 Найдите вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(2;3;-1)$ и $\vec{b}=(1;-1;3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k})=0$.

18 Вычислите расстояние между параллельными сторонами параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=(6;0;2)$ и $\overrightarrow{AC}=(1,5;2;1)$.

19 Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{m}-3\vec{n}$, где $|\vec{m}|=5$, $|\vec{n}|=3$, $(\vec{m},\vec{n})=\dfrac{\pi}{6}$.

20 Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

21 Зная две стороны треугольника $\overrightarrow{AB}=3\vec{p}-4\vec{q}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{p}+5\vec{q}$, вычислите длину его высоты CD, если $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – взаимно перпендикулярные орты.

22 Дан вектор $\vec{q}=(3\vec{m}+4\vec{n}+5\vec{p})\times(\vec{m}+6\vec{n}+4\vec{p})$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ – взаимно перпендикулярные орты, образующие правую тройку векторов. Вычислите его длину.

23 Вычислите синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на данных векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$ и $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}+\vec{p}$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ – взаимно перпендикулярные орты.

24 Вычислите площадь треугольника с вершинами в точках $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$ и $C(4;5;-2)$.

25 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 45°. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$.

26 Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}$ и $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. Вычислите модуль вектора $\vec{c}$ и площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

27 Найдите синус угла между векторами $\vec{a}=(2;1;-2)$ и $\vec{b}=(6;-3;2)$.

28 Вычислите площадь параллелограмма, три последовательные вершины которого находятся в точках $A(7;-5;6)$, $B(9;-4;8)$, $C(6;0;6)$.

29 Вычислите площадь $\triangle ABC$ с вершинами $A(1;1;3)$, $B(3;-1;6)$, $C(5;1;-3)$.

30 Упростите выражение $(5\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c})\times(4\vec{a}+7\vec{b}-6\vec{c})$.

3.4 Смешанное произведение трех векторов и его свойства

1 Докажите, что точки $A(1;2;7)$, $B(1;-1;2)$, $C(-2;0;2)$, $D(0;1;8)$ лежат в одной плоскости.

2 Даны вершины тетраэдра $O(-5;4;8)$, $A(2;3;1)$, $B(4;1;2)$, $C(6;3;7)$. Найдите длину h высоты, которая опущена из вершины O на грань ABC.

3 Компланарны ли векторы $\vec{a}=8\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}+4\vec{k}$?

4 Какую тройку образуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правую или левую, если $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=8\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$?

5 Компланарны ли векторы $\vec{m}=2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{n}=3\vec{q}-5\vec{r}$, $\vec{l}=2\vec{p}+5\vec{r}$, если векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ – некомпланарные векторы?

6 Правой или левой является тройка векторов $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$?

7 Комланарны ли векторы $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=9\vec{i}-\vec{j}+13\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$?

8 Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если $\vec{a}=8\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=4\vec{i}$.

9 Вычислите высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}-5\vec{r}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}+4\vec{r}$, $\vec{c}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ – взаимноперпендикулярные орты.

10 Найдите объем параллелепипеда с вершинами в точках $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;3;8)$.

11 Докажите, что точки $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$, $D(5;0;-6)$ лежат в одной плоскости.

12 Покажите, что векторы $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ компланарны.

13 Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(-1;3;4)$, $\vec{b}=(2;5;2)$, $\vec{c}=(-1;2;3)$.

14 Компланарны ли векторы $\vec{a}=(1;1;1)$, $\vec{b}=(1;0;1)$, $\vec{c}=(0;1;1)$?

15 Найдите объем тетраэдра $ABCD$, зная, что $\overrightarrow{AB}=(4;-2;0)$, $\overrightarrow{CA}=(-3;6;3)$, $\overrightarrow{CD}=(1;4;-5)$.

16 Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(5;-3;2)$, $\vec{b}=(-6;3;4)$, $\vec{c}=(-8;6;-5)$.

17 Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

18 Компланарны ли векторы $\vec{a} = (-2;-1;1)$, $\vec{b} = (4;4;1)$, $\vec{c} = (4;-6;2)$?

19 Установите, образуют ли векторы $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (1;-1;3)$, $\vec{c} = (1;9;-11)$ базис.

20 Докажите, что четыре точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

21 Вычислите объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

22 Компланарны ли векторы $\vec{a} = (3;-2;1)$, $\vec{b} = (2;1;2)$, $\vec{c} = (3;-1;-2)$?

23 Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислите $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

24 Даны вершины тетраэдра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Найдите длину его высоты, проведенной из точки D.

25 Докажите, что точки $A(1;0;7)$, $B(-1;-1;2)$, $C(2;-2;2)$, $D(0;1;9)$ лежат в одной плоскости.

26 Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найдите координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Ox.

27 Треугольная пирамида $ABCD$ имеет объем $V = 2$, три ее вершины находятся в точках $A(2;1;3)$, $B(3;3;2)$, $C(1;2;4)$. Найдите координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oz.

28 Покажите, что точки $A(-1;2;1)$, $B(-3;1;2)$, $C(3;-2;2)$, $D(3;-4;3)$ лежат в одной плоскости.

29 Какой тройкой является тройка векторов $\vec{a} = (1;-1;2)$, $\vec{b} = (-2;1;1)$, $\vec{c} = (1;-2;2)$?

30 Треугольная пирамида $ABCD$ имеет объем $V = 3$, три ее вершины находятся в точках $A(1;2;3)$, $B(3;1;2)$, $C(2;3;1)$. Найдите координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Ox.

4 Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

4.1 Аналитическая геометрия на плоскости

1 Найдите внутренние углы треугольника, если известно, что его стороны лежат на прямых $4x - 3y + 7 = 0$, $3x + 2y - 16 = 0$, $x - 5y + 6 = 0$.

2 Вычислите площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $2x+7y-14=0$.

3 Даны две смежные вершины параллелограмма $A(1;-2)$, $B(3;2)$ и точка $K(5;-1)$ пересечения его диагоналей. Найдите две другие вершины параллелограмма.

4 Даны середины сторон треугольника $K(-1;5)$, $M(1;1)$, $P(4;3)$. Найдите его вершины.

5 Найдите точку пересечения медиан треугольника, вершины которого $A(-2;1)$, $B(2;-1)$, $C(4;3)$.

6 Даны вершины треугольника $A(2;1)$, $B(-2;2)$, $C(-8;6)$. Найдите длину высоты, опущенной из вершины B.

7 На оси Oy найдите точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $M(4;5)$.

8 Через точку $M(1;-2)$ проведите прямую, параллельную прямой $4x+7y+3=0$, и прямую, перпендикулярную данной прямой.

9 Через точку пересечения прямых $3x+5y-8=0$ и $4x-7y+3=0$ проведите прямую, перпендикулярную прямой $2x+6y-2=0$.

10 Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;-5)$ и параллельной биссектрисе второго координатного угла.

11 Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения медиан треугольника, стороны которого лежат на прямых, заданных уравнениями $y=4x+4$, $y=-x+4$, $4y=x+1$.

12 Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-5y+2=0$, $5x-2y+4=0$ перпендикулярно прямой $x+3y+2=0$.

13 Дан треугольник с вершинами $A(3;5)$, $B(-3;4)$, $C(-2;1)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

14 Даны вершины треугольника $A(1;3)$, $B(-3;0)$, $C(2;-1)$. Напишите уравнение высоты треугольника, проведенной через вершину C.

15 Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+4y=0$, $5x-12y+24=0$, параллельно прямой $3x-5y+7=0$.

16 Найдите координаты точки, равноудаленной от точек $A(2;1)$, $B(3;-2)$ и $C(-4;-1)$.

17 Даны точки $A(1;-2)$, $B(0;3)$, $C(4;1)$. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно BC.

18 Даны вершины треугольника $A(2;-3)$, $B(3;-5)$, $C(4;1)$. Напишите уравнение медианы, проведенной из вершины C.

19 Найдите координаты проекции точки $A(-5;6)$ на прямую $7x-13y-105=0$.

20 Даны вершины треугольника $A(6;2)$, $B(30;-5)$, $C(12;19)$. Найдите уравнение высоты, проведенной из точки A.

21 На прямой $2x+y+11=0$ найдите точку, равноудаленную от точек $A(1;1)$ и $B(3;0)$.

22 Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(8;4)$. Найдите координаты четвертой вершины.

23 Уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-5=0$. Составьте уравнения трех остальных сторон квадрата, если $(-1;0)$ есть точка пересечения его диагоналей.

24 Вычислите расстояние от точки $B(1;0)$ до прямой AC, если $A(5;-3)$, $C(17;2)$.

25 В равнобедренном прямоугольном треугольнике даны координаты вершины острого угла $(5;7)$ и уравнение противолежащего катета $6x+4y-9=0$. Составьте уравнение гипотенузы.

26 Диагонали ромба, равные 10 и 4 единицам длины, приняты за оси координат. Напишите уравнения сторон этого ромба.

27 Даны вершины треугольника $A(-1;2)$, $B(3;1)$, $C(0;4)$. Через каждую из них проведите прямую, параллельную противолежащей стороне.

28 Докажите, что точки $A(-2;2)$, $B(-3;1)$, $C(7;7)$, $D(3;1)$ являются вершинами трапеции. Составьте уравнения диагоналей этой трапеции.

29 Через точку $M(4;-3)$ проведите прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями, была равна трем квадратным единицам.

30 Составьте уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(0;2)$ и уравнения высот (BM) $x+y=4$ и (CM) $y=2x$, где M – точка пересечения высот.

4.2 Кривые второго порядка

Приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и постройте эту кривую.

1 $4x^2+y^2-8x+4y=0$.

2 $2x^2+3y^2+12x-6y+21=0$.

3 $9x^2+16y^2+36x-64y-44=0$.

4 $9x^2+4y^2+36x-8y+36=0$.

5 $4x^2+25y^2-8x+100y+4=0$.

6 $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0$.

7 $4x^2+9y^2-32x+36y+64=0$.

8 $9x^2+4y^2+18x-8y+49=0$.

9 $x^2+25y^2+4x-150y+204=0$.

10 $3x^2+2y^2+12x-16y+44=0$.

11 $4x^2+9y^2+32x-16y+37=0$.

12 $4x^2+y^2-8x+4y+24=0$.

13 $x^2+4y^2+10x-24y+57=0$.

14 $4x^2+9y^2+32x-18y+109=0$.

15 $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$.

16 $9x^2-4y^2+54x+8y+41=0$.

17 $9y^2+12y-6x+2=0$.

18 $4x^2-25y^2+8x-10y+4=0$.

19 $x^2-4x+2y-2=0$.

20 $4x^2-20x+y+28=0$.

21 $2x^2-4x-5y-13=0$.

22 $y^2+6y+2x+13=0$.

23 $2y^2-16y-3x+35=0$.

24 $x^2-6x-3y+6=0$.

25 $5y^2+20y+2x+16=0$.

26 $4x^2+y^2+24x-4y+24=0$.

27 $9x^2-4y^2+72x-16y+92=0$.

28 $4x^2-40x-3y+106=0$.

29 $2y^2+12y+5x+23=0$.

30 $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.

4.3 Аналитическая геометрия в пространстве

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найдите:
1) уравнения прямой A_1A_2;
2) площадь грани $A_1A_2A_3$;
3) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
4) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
5) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
6) объем пирамиды;
7) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.
Сделайте чертеж.

1	$A_1(4;2;5)$,	$A_2(0;7;2)$,	$A_3(0;2;7)$,	$A_4(1;5;0)$.
2	$A_1(4;4;10)$,	$A_2(4;10;2)$,	$A_3(2;8;4)$,	$A_4(9;6;9)$.
3	$A_1(4;6;5)$,	$A_2(6;9;4)$,	$A_3(2;10;10)$,	$A_4(7;5;9)$.
4	$A_1(3;5;4)$,	$A_2(8;7;4)$,	$A_3(5;10;4)$,	$A_4(4;7;8)$.
5	$A_1(10;6;6)$,	$A_2(-2;8;2)$,	$A_3(6;8;9)$,	$A_4(7;10;3)$.
6	$A_1(1;8;2)$,	$A_2(5;2;6)$,	$A_3(5;7;4)$,	$A_4(4;10;9)$.
7	$A_1(6;6;5)$,	$A_2(4;9;5)$,	$A_3(4;6;11)$,	$A_4(6;9;3)$.
8	$A_1(7;2;2)$,	$A_2(5;7;7)$,	$A_3(5;3;1)$,	$A_4(2;3;7)$.
9	$A_1(8;6;4)$,	$A_2(10;5;5)$,	$A_3(5;6;8)$,	$A_4(8;10;7)$.
10	$A_1(7;7;3)$,	$A_2(6;5;8)$,	$A_3(3;5;8)$,	$A_4(8;4;1)$.
11	$A_1(3;1;4)$,	$A_2(-1;6;1)$,	$A_3(-1;1;6)$,	$A_4(0;4;-1)$.
12	$A_1(3;3;9)$,	$A_2(6;9;1)$,	$A_3(1;7;3)$,	$A_4(8;5;8)$.

13	$A_1(3;5;4)$,	$A_2(5;8;3)$,	$A_3(1;9;9)$,	$A_4(6;4;8)$.
14	$A_1(2;4;3)$,	$A_2(7;6;3)$,	$A_3(4;9;3)$,	$A_4(3;6;7)$.
15	$A_1(9;5;5)$,	$A_2(3;7;1)$,	$A_3(5;7;8)$,	$A_4(6;9;2)$.
16	$A_1(0;7;1)$,	$A_2(4;1;5)$,	$A_3(4;6;3)$,	$A_4(3;9;8)$.
17	$A_1(5;5;4)$,	$A_2(3;8;4)$,	$A_3(3;5;10)$,	$A_4(5;8;2)$.
18	$A_1(6;1;1)$,	$A_2(4;6;6)$,	$A_3(4;2;0)$,	$A_4(1;2;6)$.
19	$A_1(7;5;3)$,	$A_2(9;4;4)$,	$A_3(4;5;7)$,	$A_4(7;9;6)$.
20	$A_1(6;6;2)$,	$A_2(5;4;7)$,	$A_3(2;4;7)$,	$A_4(7;3;0)$.
21	$A_1(3;0;0)$,	$A_2(0;2;3)$,	$A_3(1;4;1)$,	$A_4(1;0;3)$.
22	$A_1(1;0;3)$,	$A_2(1;4;1)$,	$A_3(3;0;0)$,	$A_4(0;2;3)$.
23	$A_1(0;0;2)$,	$A_2(3;0;5)$,	$A_3(1;1;0)$,	$A_4(4;1;2)$.
24	$A_1(5;2;3)$,	$A_2(1;4;0)$,	$A_3(0;0;0)$,	$A_4(3;-2;1)$.
25	$A_1(3;-2;1)$,	$A_2(0;0;0)$,	$A_3(1;4;0)$,	$A_4(5;2;3)$.
26	$A_1(4;1;2)$,	$A_2(1;1;0)$,	$A_3(3;0;5)$,	$A_4(0;0;2)$.
27	$A_1(1;3;2)$,	$A_2(4;0;0)$,	$A_3(-2;1;2)$,	$A_4(3;2;7)$.
28	$A_1(3;1;-2)$,	$A_2(1;-2;1)$,	$A_3(-2;1;0)$,	$A_4(2;2;5)$.
29	$A_1(1;-1;6)$,	$A_2(4;5;-2)$,	$A_3(-1;3;0)$,	$A_4(6;1;5)$.
30	$A_1(0;2;3)$,	$A_2(3;0;0)$,	$A_3(1;0;3)$,	$A_4(1;4;1)$.

4.4 Поверхности второго порядка

Методом сечений исследуйте форму поверхности. Сделайте чертеж.

1 $2y^2 + z^2 = 1 - x$.

2 $x^2 + y^2 = 2(z-1)^2$.

3 $z^2 + 4z - 2x + 6 = 0$.

4 $z^2 = 4x$.

5 $-x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6 = 0$.

6 $y^2 - 2z^2 - 8 = 0$.

7 $2x^2 - y^2 - 3z^2 = 5$.

8 $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

9 $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16 = 0$.

10 $16x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 96 = 0$.

11 $z^2 + y^2 = 4 - x$.

12 $x^2 - y^2 + 2z^2 - 4 = 0$.

13 $3x^2 - y^2 - z^2 = 0$.

14 $x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$.

15 $x^2 - z^2 = 0$.

16 $x^2 + y^2 = z^2 - 1$.

17 $4 - y = x^2 + z^2$.

18 $4x^2 - y^2 + 4z^2 + 16 = 0$.

19 $2x^2 - 3y^2 + 4z^2 - 36 = 0$.

20 $4x^2 + 4y^2 - 5z = 0$.

21 $4y^2+5z^2-15x=0$.

22 $3x^2+4y^2-12=0$.

23 $x^2+4y^2=16z$.

24 $9x^2+36y^2-4z^2=-36$.

25 $2x^2+y^2+z=4$.

26 $5x^2-6y^2+15=0$.

27 $3x^2-9y^2+4z^2+16=0$.

28 $9x^2+16y^2-144z^2=144$.

29 $4x=z^2+2y^2$.

30 $z=4-y^2$.

5 Методические указания к решению задач

Задача 1. Даны три вектора $\vec{a}=(4;5)$, $\vec{b}=(2;1)$ и $\vec{c}=(8;7)$. Найдите разложение вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение

Проверим, образуют ли эти векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ базис на плоскости. Два вектора образуют базис на плоскости, если они неколлинеарны: $\left(\vec{a}\parallel\vec{b},\ \text{если } \dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}\right)$. Поскольку $\dfrac{4}{2}\neq\dfrac{5}{1}$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости, то вектор $\vec{c}$ можно единственным образом разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}. \tag{1}$$

Подставим разложение векторов $\vec{a}=4\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{c}=8\vec{i}+7\vec{j}$ по базису $(\vec{i},\vec{j})$ в (1), получим тождество $8\vec{i}+7\vec{j}=x\cdot(4\vec{i}+5\vec{j})+y\cdot(2\vec{i}+\vec{j})$. Приравнивая коэффициенты при векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в правой и левой частях, получим систему уравнений $\begin{cases}4x+2y=8,\\5x+y=7.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$ Значит, $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$.

Ответ: $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$.

Задача 2. Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(1;-2;2)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a}=-18$.

Решение

Запишем для векторов $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{x}=(x;y;z)$ свойство коллинеарности и скалярное произведение в координатной форме

$$\begin{cases} \dfrac{a_x}{x} = \dfrac{a_y}{y} = \dfrac{a_z}{z} = t, \\ a_x \cdot x + a_y \cdot y + a_z \cdot z = -18. \end{cases}$$

Поскольку $\vec{a} = (1;-2;2)$ и $\vec{x} \cdot \vec{a} = -18$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2}{y} = \dfrac{2}{z} = t, \\ x - 2y + 2z = -18. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \quad y = \dfrac{-2}{t}, \quad z = \dfrac{2}{t}, \\ \dfrac{1}{t} + \dfrac{4}{t} + \dfrac{4}{t} = -18 \Rightarrow t = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 4, \\ z = -4. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{x} = (-2;4;-4)$.

Задача 3. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$, $(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение

Площадь треугольника равна половине модуля векторного произведения векторов, на которых он построен:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} S_{\square} = \frac{1}{2}\left|(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})\right|.$$

Используя свойства векторного произведения, получаем

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} |3\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - 6\vec{b} \times \vec{a} - 4\vec{b} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |8\vec{a} \times \vec{b}| =$$

$$= 4|\vec{a} \times \vec{b}| = \left|4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a},\vec{b})\right| = \left|4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right| = \left|100 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = 50\sqrt{2}.$$

Ответ: $S_{\triangle} = 50\sqrt{2}$ кв. ед.

Задача 4. Вычислить объем тетраэдра $OABC$, если $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -3\vec{j} + \vec{k}$ и $\overrightarrow{OC} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Решение

Объем тетраэдра равен $\dfrac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, т. е. $\dfrac{1}{6}$ модуля смешанного произведения векторов. Следовательно,

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар.}} = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} \right| = \frac{1}{6} \cdot \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Поскольку $\overrightarrow{OA} = (3;4;0)$, $\overrightarrow{OB} = (0;-3;1)$, $\overrightarrow{OC} = (0;2;5)$, то

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \operatorname{mod} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| (-15-2) \right| = 8{,}5.$$

Ответ: $V = 8{,}5$ куб. ед.

Задача 5. Дан $\triangle ABC$: $A(1;2)$, $B(3;7)$, $C(5;-13)$. Вычислите длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A.

Решение

Согласно определению медианы, точка M – середина отрезка BC (рисунок 1). Координаты точки M найдем по формулам деления отрезка в данном отношении:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

$$x_M = \frac{3+5}{2} = 4, \quad y_M = \frac{7-13}{2} = -3; \quad M(4;-3).$$

Составим уравнение медианы AM. Воспользуемся формулой уравнения прямой, проходящей через две точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, здесь $A(x_1;y_1)$, $M(x_2;y_2)$. Получим

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-2}{-3-2}, \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-5}.$$

Откуда уравнение медианы имеет вид: $5x + 3y - 11 = 0$.

Длину перпендикуляра BN найдем как расстояние от точки до прямой:

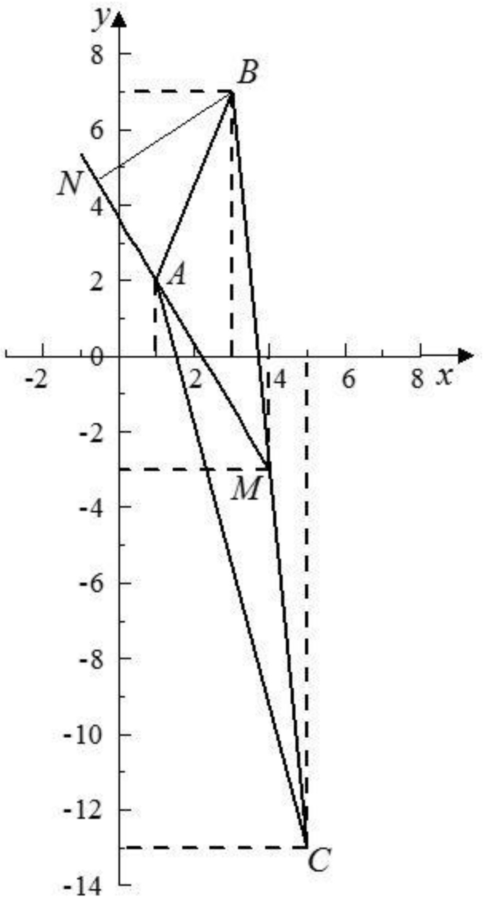

Рисунок 1

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В уравнении медианы AM: $A = 5$, $B = 3$, $D = -11$; x_0, y_0 – координаты точки B, т. е. $x_0 = 3$, $y_0 = 7$. Итак,

$$d = \frac{|5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 - 11|}{\sqrt{25 + 9}} = \frac{25}{\sqrt{34}} = \frac{25\sqrt{34}}{34}.$$

Ответ: $BN = \frac{25\sqrt{34}}{34}$ лин. ед.

Задача 6. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(3;1;4)$, $A_2(-1;6;1)$, $A_3(-1;1;6)$, $A_4(0;4;1)$. Найдите:

1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
2) площадь грани $A_1A_2A_3$;
3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
4) объем пирамиды;
5) уравнения прямой A_1A_2;
6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
7) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Сделайте чертеж.

Решение

1 Поскольку

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|},$$

найдем векторы $\overrightarrow{A_1A_2} = (-4;5;-3)$ и $\overrightarrow{A_1A_4} = (-3;3;-3)$, тогда

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}\right) = -4 \cdot (-3) + 5 \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) = 36,$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Следовательно, $\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \frac{36}{5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{12}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

2 Площадь грани $A_1A_2A_3$ найдем по формуле $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|$. Поскольку $\overrightarrow{A_1A_2} = (-4;5;-3)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (-4;0;2)$, то векторное произведение

$$\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\vec{i} + 20\vec{j} + 20\vec{k}.$$

Следовательно, $\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right] = (10;20;20)$ и $\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right]\right| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 20^2} = 30$.

Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\cdot 30 = 15$ кв. ед.

3 Чтобы найти угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$, воспользуемся формулой

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Здесь $\overline{S} = (m,n,p)$ – направляющий вектор прямой, $\overrightarrow{N} = (A,B,C)$ – нормальный вектор плоскости. Поскольку направляющий вектор прямой $\overrightarrow{A_1A_4} = (-3;3;-3)$ (см. п. 1) и нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$ $\overrightarrow{N} = (10;20;20)$ (см. п. 2), то

$$\sin\varphi = \frac{3\cdot 10 - 3\cdot 20 + 3\cdot 20}{\sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{10^2 + 20^2 + 20^2}} = \frac{30}{3\sqrt{3}\cdot 30} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

4 Поскольку объем пирамиды, построенной на приведенных к общему началу некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен $V = \frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$, находим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 36 - 30 + 24 - 60 = -30.$$

Строками определителя являются координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ (найдены в пп. 1 и 2).

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} \cdot |-30| = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ куб. ед.}$$

5 Канонические уравнения прямой A_1A_2 имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты точки A_1;

m, n, p – координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$.

Следовательно, $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-4}{-3}$ – канонические уравнения прямой A_1A_2.

6 Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ найдем по формуле

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты точки A_1 плоскости;

A, B, C – координаты нормального вектора $\vec{N}$ плоскости.

Следовательно, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид:

$$1 \cdot (x-3) + 2 \cdot (y-1) + 2 \cdot (z-4) = 0 \text{ или } x + 2y + 2z - 13 = 0.$$

7 Чтобы найти уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, воспользуемся формулой

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C},$$

Здесь $A_4\left(x_1; y_1; z_1\right)$, $\vec{N} = \left(A; B; C\right)$.

Следовательно, уравнения высоты

$$\frac{x-0}{10} = \frac{y-4}{20} = \frac{z-1}{20} \quad \text{или} \quad \frac{x}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

Сделаем чертеж (рисунок 2).

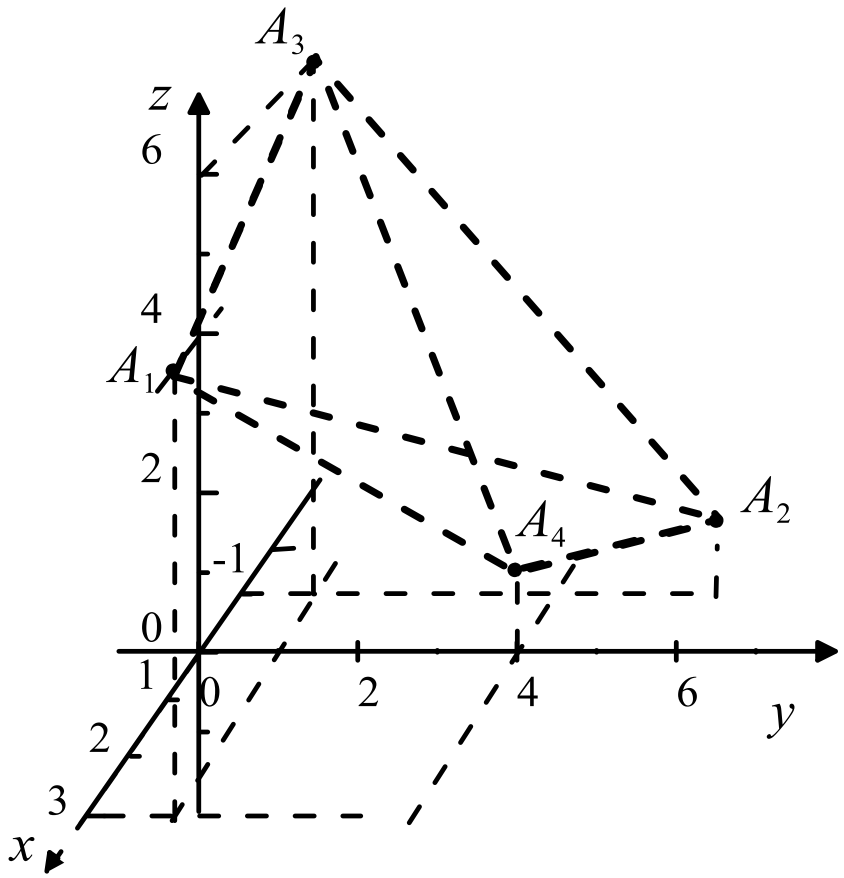

Рисунок 2

Задача 7. Методом сечений исследуйте форму поверхности $z = 2y^2 + x^2$. Сделайте чертеж.

Решение

Найдем сечение данной поверхности координатными плоскостями и плоскостью, параллельной плоскости xOy.

1 Найдем сечение данной поверхности плоскостью $z = 0$ (плоскость xOy). Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} z = 2y^2 + x^2, \\ z = 0. \end{cases} \Rightarrow \; 2y^2 + x^2 = 0 \; \Rightarrow \; \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Итак, в плоскости xO лежит одна точка $O(0;0;0)$, принадлежащая поверхности.

2 Найдем сечение данной поверхности плоскостью $z = h$ (параллельной плоскости xOy), где $h > 0$. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} z = 2y^2 + x^2, \\ z = h. \end{cases} \Rightarrow \; 2y^2 + x^2 = h \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{h/2} + \frac{x^2}{h} = 1.$$

Полученная кривая есть эллипс, лежащий в плоскости $z = h$.

3 Пересечем данную поверхность координатной плоскостью $x = 0$ (zOy), получим:

$$\begin{cases} z = 2y^2 + x^2, \\ x = 0. \end{cases} \Rightarrow \; z = x^2.$$

Это уравнение параболы, лежащей в плоскости zOy.

4 Пересекая поверхность плоскостью $y = 0$ (zOx), получим

$$\begin{cases} z = 2y^2 + x^2, \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow \; z = x^2.$$

Это уравнение параболы, лежащей в плоскости zOx.

Полученных данных достаточно для построения чертежа. Соберем их вместе:

1) в плоскости xOy имеем точку $O(0;0;0)$;

2) в плоскости $z = h$ имеем эллипс $\dfrac{x^2}{h} + \dfrac{y^2}{h/2} = 1$;

3) в плоскости zOy имеем параболу $z = 2y^2$;

4) в плоскости zOx имеем параболу $z = x^2$.

Данное уравнение определяет эллиптический параболоид (рисунок 3).

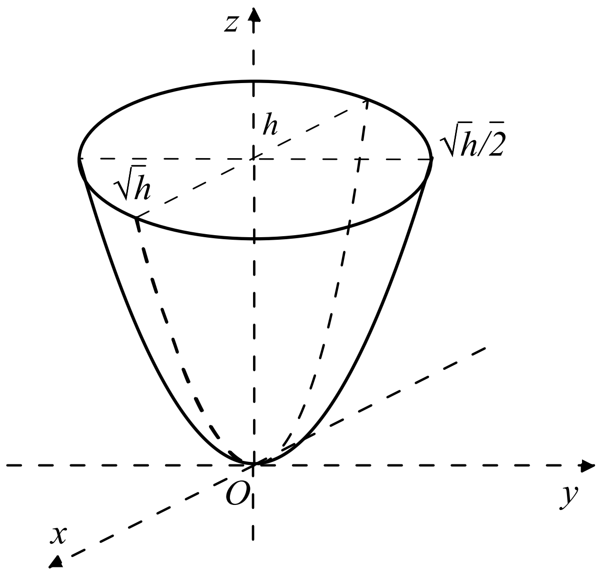

Рисунок 3

Список литературы

1 **Беклемишев, Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 10-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2005. – 315 с.

2 Высшая математика. Общий курс: учебник / Под ред. С. А. Самаля. – Минск: Выш. шк., 2000. – 351 с.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник в 2 т. / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – Т. 1. – 544 с.

4 **Гусак, А. А.** Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 5-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 640 с.

5 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебник / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Выш. шк., 1992. – 384 с.

6 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2004. – Ч. 1. – 288 с.

7 Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие в 2 т. / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М.: Наука, 1986. – Т.1. – 464 с.

8 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – М.: Высш. шк., 1973. – 176 с.

9 **Шипачев, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев. – 7-е изд. – М.: Высш. шк., 2005. – 479 с.