ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

Высшая математика

Методические указания и варианты заданий к контрольной работе №1 для студентов специальности 1-25 01 04 «Финансы и кредит» заочной формы обучения

Могилев 2008

УДК 51
ББК 22.1
В 95

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» 7 марта 2007 г., протокол № 7

Составитель: доц. И. И. Маковецкий

Рецензент: заведующий кафедрой финансов и бухгалтерского учета доц. Н.А. Сергейчик

В методических указаниях даны решения типовых задач с необходимыми теоретическими сведениями, а также приведены варианты заданий контрольной работы.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения специальности 1-25 01 04 «Финансы и кредит».

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнев
Технический редактор	А.Г. Червинская
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж 115 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ №02330/375 от 29.06.2004 г.
212005, г. Могилев, пр. Мира, 43

Содержание

1 Теоретические вопросы

Тема 1. Матрицы, определители и системы уравнений

1 Определение матрицы и примеры специальных матриц.

2 Линейные операции над матрицами и произведение матриц.

3 Определитель квадратной матрицы, его рекурсивное определение, основные свойства и способы вычисления.

4 Вырожденная матрица.

5 Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений.

6 Правило Крамера.

7 Ранг матрицы и метод окаймляющих миноров.

8 Теорема Кронекера-Капелли и алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений.

9 Обращение матрицы и применение обратной матрицы для решения системы линейных алгебраических уравнений.

Тема 2. Элементы векторной алгебры

1 Векторы на плоскости и в пространстве.

2 Сумма векторов, произведение вектора на число.

3 Линейная зависимость, независимость векторов, линейная комбинация векторов, векторный базис.

4 Коллинеарность, компланарность векторов, декартов базис и системы координат на плоскости и в пространстве.

5 Координаты. Линейные операции над векторами в координатной форме.

6 Скалярное произведение векторов (обзор), его свойства и применение; векторное произведение двух векторов и его свойства, истолкование и применение; координатная форма вычисления произведений.

Тема 3. Основные понятия аналитической геометрии

1 Общее уравнение линии в декартовой и полярной системах координат на плоскости и в пространстве.

2 Уравнение прямой на плоскости, его виды и приемы преобразования одного вида уравнения к другому; задачи, связанные со взаимным расположением прямых на плоскости.

3 Плоскость в пространстве: уравнение плоскости, проходящей через точку нормально к вектору; другие виды уравнения плоскости в пространстве и приемы преобразования одного вида уравнения к другому.

4 Взаимное расположение плоскостей в пространстве: параллельность и перпендикулярность; угол между плоскостями.

5 Прямая в пространстве; виды уравнения и приемы преобразования одного вида уравнения к другому; взаимное расположение плоскости и прямой.

Тема 4. Введение в математический анализ

1 Множество действительных чисел R и подмножества в R; окрестность точки в R; замкнутые и открытые множества; границы и грани числовых множеств.

2 Отображения и функции; обзор элементарных функций; понятия обобщённой гармоники, гиперболических функций.

3 Предел числовой последовательности: определение и свойства; существование предела ограниченной монотонной последовательности; примеры вычисления пределов.

4 Предел функции одной переменной: определение и свойства; предел функции на бесконечности; односторонние пределы; бесконечно малые и бесконечно большие величины; сравнение бесконечно малых и эквивалентные бесконечно малые.

5 Первый и второй замечательные пределы.

6 Непрерывные функции: определение, основные свойства; непрерывность сложной функции.

7 Односторонние и двусторонние пределы функции в точке; точки разрыва функции: определение и классификация.

8 Монотонные функции; существование и непрерывность обратной функции; исследование функций на непрерывность; свойства функций, определенных и непрерывных на замкнутом промежутке.

Тема 6. Дифференциальное исчисление функций одного переменного

1 Производная функция одной переменной: определение, геометрический и механический смысл, свойства; производные основных элементарных функций. Дифференциал функции: определение, свойства.

2 Производная сложной, обратной функции; производные и дифференциалы высших порядков.

3 Производные функций, заданных параметрически.

4 Теоремы Ферма, Ролля и Коши; правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

5 Разложение функции по формуле Тейлора; остаток формулы Тейлора.

6 Постановка задачи интерполирования; полиномы Лагранжа и Ньютона.

Тема 7. Функции нескольких переменных

1 Множества в 2-мерном евклидовом пространстве: открытые, замкнутые, связные, односвязные ограниченные, компактные.

2 Функции двух переменных: определение и свойства; предел, непрерывность и основные свойства.

Тема 8. Дифференциальное исчисление функций многих аргументов

1 Частные производные: определение, свойства; дифференцируемость функций; применение полного дифференциала.

2 Частные производные сложных функций; частные производные высших порядков; теорема о смешанных производных; формула Тейлора для функции двух и n-переменных.

3 Функциональные уравнения и неявные функции: существование решения, непрерывность и дифференцируемость решения.

4 Локальные экстремумы, необходимые условия существования.

5 Достаточные условия экстремума.

6 Условные экстремумы функций нескольких переменных: определение, необходимые и достаточные условия; метод множителей Лагранжа; глобальные экстремумы.

7 Математическое моделирование функциональной зависимости с помощью метода наименьших квадратов.

Тема 9. Комплексные числа и функции

1 Комплексные числа: алгебраическая и тригонометрическая формы комплексных чисел; сумма, произведение и частное комплексных чисел.

2 Корни n-й степени из комплексных чисел; показательная форма комплексных чисел; теорема Гаусса.

2 Общие рекомендации по оформлению контрольной работы

2.1 Выбор варианта контрольной работы

Номер варианта для каждой задачи выбирается по последней цифре номера зачетной книжки. Если эта цифра «0», то следует выполнять 10 вариант. Например, номер зачетной книжки оканчивается на 6. Тогда номер варианта задания равен 6.

Примечание - Количество и содержание заданий контрольных работ, выполняемых в каждом семестре, определяется студентам на установочной сессии.

2.2 Правила оформления контрольной работы

При выполнении работ необходимо:

1) указывать на титульном листе номер работы, название дисциплины, номер курса и название факультета, номер зачетной книжки, фамилию, имя и отчество, обратный адрес;

2) решения задач приводить в порядке, указанном в задании;

3) перед каждым решением указывать полный номер задачи (например, 1.2.7 - первая работа, задание 2, вариант 7) и ее условие согласно заданию;

4) решения приводятся с необходимыми краткими пояснениями, крупным и разборчивым почерком;

5) после каждого решения оставлять место для возможных замечаний рецензента;

6) незачтенные работы не оформлять заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводятся в конце работы.

При несоблюдении указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

3 Решение типового варианта

Задача 1. Дана система линейных алгебраических уравнений. Требуется:

1) решить СЛАУ по формулам Крамера;

2) записать СЛАУ в матричной форме и решить ее матричным способом, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя ее определение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14; \\ \qquad 4x_2 - x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$$

Решение.

1 По формулам Крамера $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 4 - 24 - 1 = -17;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 168 - 15 - 18 - 108 - 30 - 14 = -17;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 28 - 30 + 9 = -34;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 36 + 20 - 112 + 5 = -51.$$

Находим решение системы: $x_1 = \dfrac{-17}{-17} = 1, \quad x_2 = \dfrac{-34}{-17} = 2, \quad x_3 = \dfrac{-51}{-17} = 3.$

2 Для нахождения решения СЛАУ с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме AX=B, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Решение СЛАУ в матричной форме имеет вид: $X = A^{-1}B$, где A^{-1} - матрица, обратная матрице A. Найдем матрицу A^{-1} по формуле

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -17$, A_{ij} - алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} $\quad (i = \overline{1,\ 3}, \quad j = \overline{1,\ 3})$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 11, \qquad A_{21} = (-1)^{2-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -9, \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14,$$

$$A_{12} = (-1)^{1-2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{33} = (-1)^{3-3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 11 & -9 & -14 \\ -2 & -3 & 1 \\ -8 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность нахождения обратной матрицы:

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 11 & -9 & -14 \\ -2 & -3 & 1 \\ -8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 11 - 28 & 22 - 36 + 14 & 33 + 9 - 42 \\ -2 + 2 & -4 - 12 - 1 & -6 + 3 + 3 \\ -8 + 8 & -16 + 20 - 4 & -24 - 5 + 12 \end{pmatrix} =$$

$$=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-17 & 0 & 0\\ 0 & -17 & 0\\ 0 & 0 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Находим решение системы.

$$X=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}11 & -9 & -14\\ -2 & -3 & 1\\ -8 & 5 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14\\ 5\\ 9\end{pmatrix}=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}154-45-126\\ -28-15+9\\ -112+25+36\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-17\\ -34\\ -51\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Итак, решение системы: $x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=3$.

Задача 2. Даны координаты вершин пирамиды $\grave{A}_1\grave{A}_2\grave{A}_3\grave{A}_4$. $\grave{A}_1(4;\ 2;\ 5)$, $A_2(0;\ 7;\ 2)$, $\grave{A}_3(0;\ 2;\ 7)$, $\grave{A}_4(1;\ 5;\ 0)$. Найти:

1) длину ребра $\grave{A}_1\grave{A}_2$;
2) угол между ребрами $\grave{A}_1\grave{A}_2$ и $\grave{A}_1\grave{A}_4$;
3) уравнение плоскости $\grave{A}_1\grave{A}_2\grave{A}_3$;
4) угол между ребром $\grave{A}_1\grave{A}_4$ и гранью $\grave{A}_1\grave{A}_2\grave{A}_3$;
5) площадь грани $\grave{A}_1\grave{A}_2\grave{A}_3$;
6) объем пирамиды;
7) уравнение прямой $\grave{A}_1\grave{A}_2$;
8) уравнение высоты $\grave{A}_4\grave{A}$, опущенной из вершины $\grave{A}_4$ на плоскость $\grave{A}_1\grave{A}_2\grave{A}_3$;
9) длину высоты, опущенной на грань $\grave{A}_1\grave{A}_2\grave{A}_3$.

Решение

1 Расстояние между двумя точками $(\tilde{o}_1;\acute{o}_1;z_1)$ и $(\tilde{o}_2;\acute{o}_2;z_2)$ вычисляют по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\Rightarrow$$

$$\left|\overline{A_1A_2}\right|=\sqrt{(-4)^2+5^2+(-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2};$$

2 угол φ между векторами $\vec{a}(\tilde{o}_1;\acute{o}_1;z_1)$ и $\vec{b}(\tilde{o}_2;\acute{o}_2;z_2)$ находят по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}};$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$: $\overrightarrow{A_1A_2}=(-4;5;-3)$, $\overline{A_1A_4}=(-3;3;-5)$.

Тогда $\cos\varphi=\dfrac{-4\cdot(-3)+5\cdot 3-3\cdot(-5)}{\sqrt{(-4)^2+5^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+3^2+(-5)^2}}=\dfrac{42}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{43}}=\dfrac{42}{5\sqrt{86}}.$

$$\varphi=\arccos\frac{42}{5\sqrt{86}};$$

3 составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ по формуле

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \text{ где}$$

$A_1(x_1;y_1;z_1), A_2(x_2;y_2;z_2), A_3(x_3;y_3;z_3)$ - точки данной плоскости.
В нашем случае для плоскости $A_1A_2A_3$ имеем:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ 0-4 & 7-2 & 2-5 \\ 0-4 & 2-2 & 7-5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$10(x-4)+20(y-2)+20(z-5)=0,$

$x+2y+2z-18=0$ - уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

4 угол α между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ находят по формуле

$$\sin\alpha = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|},$$

где $\vec{n}$ - нормальный вектор плоскости.

$\overrightarrow{A_1A_4} = (-3;3;-5)$. Из уравнения плоскости $A_1A_2A_3$ $\vec{n}(1;2;2)$.

$$\sin\alpha = \frac{\left|1\cdot(-3)+2\cdot 3+2\cdot(-5)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{43}} = \frac{7}{3\sqrt{43}},$$

$$\alpha = \arcsin\frac{7}{3\sqrt{43}}.$$

5 $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|.$

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10\vec{i}+20\vec{j}+20\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{10^2+20^2+20^2} = 30.$$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\cdot 30 = 15;$$

6 $V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$, где $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}$ - смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$$\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 36-30+24-100=-70;$$

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\cdot\left|-70\right| = \frac{70}{6} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3};$$

7 канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно вектору $\bar{s}=(m;\ n;\ p)$ имеют вид: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

В нашем случае $\vec{s}=\overrightarrow{A_1A_2}(-4;\ 5;\ -3)$ $\grave{e}$ $M_0\equiv A_1(4;\ 2;\ 5)$. Тогда $\dfrac{x-4}{-4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-5}{-3}$ - канонические уравнения прямой $\grave{A}_1\grave{A}_2$;

8 направляющим вектором прямой $\grave{A}_4\hat{A}$ является нормальный вектор плоскости $\grave{A}_1\grave{A}_2\grave{A}_3$ $\vec{n}=(1;2;2)$. Тогда $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{2}$ - уравнения прямой $\grave{A}_4\hat{A}$;

9 длину высоты, опущенной на грань $\grave{A}_1\grave{A}_2\grave{A}_3$, можно вычислить как расстояние от точки $\grave{A}_4$ до плоскости $\grave{A}_1\grave{A}_2\grave{A}_3$. Для этого воспользуемся формулой

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где $Ax+By+Cz+D=0$ - уравнение данной плоскости, $(x_0;y_0;z_0)$ - координаты данной точки.

В нашем случае $x+2y+2z-18=0$ - уравнение плоскости $\grave{A}_1\grave{A}_2\grave{A}_3$ (см. пункт 3 и $\grave{A}_4(1;\ \ 5;\ \ 0)$

Итак, $d=\dfrac{|1\cdot 1+2\cdot 5+2\cdot 0-18|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{7}{3}$.

Задача 3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{8-x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$.

Решение.

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^4\left(1+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\tilde{n}}{x^n}=0,\ \ \tilde{a}\ddot{a}\mathring{a}\quad \tilde{n}\in R,\quad c\neq 0,\quad n\in R^+\right]=\frac{3}{1}=3;$$

б) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{8-x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-5)}{(2-x)(4+2x+x^2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-5)}{4+2x+x^2}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4};$$

в) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+7-9)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x+2-4)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3};$$

г) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{tg}\ 3x}{3x}\cdot 3x}{\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{è} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\ x}{x}=1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2};$$

д) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}=\left(1^{\infty}\right)=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1+3}{3x-1}\right)^{4x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right)^{\frac{3}{3x-1}\cdot(4x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x-3}{3x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12-\frac{3}{x}}{3-\frac{1}{x}}}=e^{4}.$$

Задача 4. Найти производные от функций:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{6x^{6}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $y=\left(x^{3}+1\right)^{5}\operatorname{ctg}6x$; в) $y=\sqrt{x^{4}+\sin^{4}x}$;

г) $y=(\cos 3x)^{\frac{x^{2}}{2}}$ д) $x^{2}-5y^{2}+4xy-1=0$; е) $\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2}; \\ y=t-\sin t. \end{cases}$

Решение. При решении заданий а)-в) применим следующие правила дифференцирования:

1) $(\tilde{n})'=0$; 2) $(x)'=1$;

3) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; 4) $(\tilde{n}u)'=c\cdot u'$

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^{2}}$; $(v\neq 0)$ 6) $\left(\dfrac{c}{v}\right)'=-\dfrac{c}{v^{2}}\cdot v'$; $(v\neq 0)$

7) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$;

8) если $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, т. е. $y=f(\varphi(x))$ - сложная функция, то $y'_x=f'(u)\cdot u'$.

На основании определения производной и правил дифференцирования составлена таблица производных основных элементарных функций.

1 $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$ $(\alpha\in R)$**;** **8** $(\operatorname{tg}u)'=\dfrac{1}{\cos^{2}u}\cdot u'$**;**

2 $\left(a^{u}\right)'=a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$**;** **9** $(\operatorname{ctg}u)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}u}\cdot u'$**;**

3 $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$;

4 $(\log_a u)' \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;

5 $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

6 $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;

7 $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$;

10 $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11 $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

12 $\left(\operatorname{arctg}\ u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13 $\left(arc\operatorname{ctg}\ u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Используя правила дифференцирования и таблицу производных, найдем производные данных функций:

а) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{6x^6} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{6}x^{-6} - \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}x^{-6} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' + \frac{1}{6}\left(x^{-6}\right)' - \frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{6}(-6)x^{-7} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{x^7} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Ответ: $y' = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} - \dfrac{1}{x^7} + \dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$.

б) $y = \left(x^3+1\right)^5 \operatorname{ctg} 6x$.

$$y' = \left(\left(x^3+1\right)^5\right)' \cdot \operatorname{ctg} 6x + \left(x^3+1\right)^5 \cdot (\operatorname{ctg} 6x)' =$$

$$= 5(x^3+1)^4 3x^2 \operatorname{ctg} 6x - \left(x^3+1\right)^5 \frac{1}{\sin^2 6x} \cdot 6 = 15x^2(x^3+1)^4 \operatorname{ctg} 6x - \frac{6\left(x^3+1\right)^5}{\sin^2 6x}.$$

Ответ: $y' = 15x^2(x^3+1)^4 \operatorname{ctg} 6x - \dfrac{6\left(x^3+1\right)^5}{\sin^2 6x}$.

в) $y = \sqrt{x^4 + \sin^4 x}$.

$$y' = \left(\left(x^4 + \sin^4 x\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^4 + \sin^4 x\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x^4 + \sin^4 x\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^4 + \sin^4 x}}\left(\left(x^4\right)' + (\sin^4 x)'\right) = \frac{4x^3 + 4\sin^3 x \cdot \cos x}{2\sqrt{x^4 + \sin^4 x}} = \frac{2x^3 + \sin^2 x \cdot \sin 2x}{\sqrt{x^4 + \sin^4 x}}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{2x^3 + \sin^2 x \cdot \sin 2x}{\sqrt{x^4 + \sin^4 x}}$.

г) $y = (\cos 3x)^{\frac{x^2}{2}}$.

Данная функция является степенно-показательной. Применим метод логарифмического дифференцирования и прологарифмируем функцию

$\ln y = \ln(\cos 3x)^{\frac{x^2}{2}}$.

Применим свойство логарифмов: $\ln a^b = b\ln a$. Тогда $\ln y = \dfrac{x^2}{2}\ln(\cos 3x)$.

Дифференцируем обе части равенства по x:

$$(\ln y)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln(\cos 3x) + \frac{x^2}{2}(\ln(\cos 3x))';$$

$$\frac{1}{y}y' = x\ln(\cos 3x) + \frac{x^2}{2}\frac{1}{\cos x}(-3\sin 3x);$$

$$y' = y\left(x\ln(\cos 3x) - \frac{3}{2}x^2 \operatorname{tg} 3x\right);$$

$$y' = (\cos 3x)^{\frac{x^2}{2}}\left(x\ln(\cos 3x) - \frac{3}{2}x^2 \operatorname{tg} 3x\right).$$

Ответ: $y' = (\cos 3x)^{\frac{x^2}{2}}\left(x\ln(\cos 3x) - \frac{3}{2}x^2 \operatorname{tg} 3x\right)$.

д) $x^2 - 5y^2 + 4xy - 1 = 0$.

Функция задана неявно в виде $F(x, y) = 0$. Дифференцируем обе части данного уравнения, считая y функцией от x:

$2x - 10y \cdot y' + 4y + 4xy' = 0$.

Выразим из уравнения y':

$y'(4x - 10y) = -2x - 4y$;

$$y' = \frac{-2(x+2y)}{2(2x-5y)} = \frac{x+2y}{5y-2x}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{-2(x+2y)}{2(2x-5y)} = \dfrac{x+2y}{5y-2x}$.

е) $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}; \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

Функция задана параметрически: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$ Производная такой функции находится по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$x'_t = \left(\cos\frac{t}{2}\right)' = -\sin\frac{t}{2}\left(\frac{t}{2}\right)' = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}. \qquad y'_t = (t - \sin t)' = t' - (\sin t)' = 1 - \cos t.$$

$$y'_x=\frac{1-\cos t}{-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}}=-\frac{2(1-\cos t)}{\sin\frac{t}{2}}=-\frac{4\sin^2\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=-4\sin\frac{t}{2}.$$

Ответ: $\begin{cases} y'_x=-4\sin\dfrac{t}{2}; \\ x=\cos\dfrac{t}{2}. \end{cases}$

Задача 5. Правило Бернулли-Лопиталя сформулируем в виде теоремы.

Теорема: если две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

1) бесконечно малые или бесконечно большие при $x\to x_0$;
2) дифференцируемы в окрестности точки x_0;
3) $\psi'(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0, за исключением, возможно, самой точки x_0;
4) существует конечный (или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, то предел отношения этих функций равен пределу отношения их производных, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Найти пределы, применяя правило Бернулли-Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}$.

Решение

а) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2\cdot 1+1}{e}=\frac{3}{e};$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\cdot\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2\cdot 1-0}=0;$$

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=(\infty)^0$.

Применим тождество $e^{\ln x}=x$. Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\ln(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{2\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)} = \left(0\cdot\infty\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\ln(\operatorname{tg}x)}{\frac{1}{2\cos x}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\ln(\operatorname{tg}x))'}{\left(\frac{1}{2\cos x}\right)'}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{2\cos^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x\cos x}}{\frac{\sin x}{2\cos^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{\sin^2 x}} = e^{\frac{2\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}}} = e^0 = 1.$$

Задача 6. Найти локальные, условные или глобальные экстремумы функции:

а) $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$;

б) $z = x + y$ при условии, что $x^2 + y^2 = 2$;

в) $z = x^2 y(2 - x - y)$, где $D:\{x = 0,\ \ y = 0,\ \ x + y = 6\}$.

Решение.

Найдем критические точки функции, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{zy} = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6 - 2x - y, \qquad \frac{\partial z}{zy} = -x - 2y.$$

$$\begin{cases} 6 - 2x - y = 0, \\ -x - 2y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 6, \\ x + 2y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4, \\ y = -2. \end{cases}$$

$M_0(4;-2)$ - критическая точка.

Применим достаточные условия экстремума.

Найдем вторые частные производные:

$$\grave{A} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2;\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -1;\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Составляем определитель (дискриминант):

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = (-2)(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Т.к. $\Delta > 0$, $A = -2 < 0$, то в точке M_0 (4; -2) функция имеет максимум.

$Z_{\max} = Z(4;\ \ -2) = 1 + 6\cdot 4 - 16 - 4(-2) - 4 = 13$.

Ответ: Z_{max}=13.

$z = x + y$ при условии, что $x^2 + y^2 = 2$.

Для составления функции Лагранжа применим формулу

$$L(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y) + \lambda F(x,\ y),$$

где

$z = f(x,\ y)$ - данная функция,

$F(x,\ \ y)=0$ - уравнение связи.

Имеем $L(x,\ \ y,\ \ \lambda)=x+y+\lambda(x^2+y^2-2)$.

Необходимые условия условного экстремума выражаются системой уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0,\\ F(x,\ \ y)=0;\end{cases}\qquad \text{поэтому}\ \begin{cases}1+2\lambda x=0,\\ 1+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=2,\end{cases}\qquad \begin{cases}\boldsymbol{x}=-\dfrac{1}{2\lambda},\\ \boldsymbol{y}=-\dfrac{1}{2\lambda},\\ \left(-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2=2;\end{cases}$$

из полученного уравнения имеем $\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$.

Для $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ $x_1=1$, $y_1=1$, т. е. M_1 (1; 1).

Для $\lambda=\dfrac{1}{2}$ $x_1=-1$, $y_1=-1$, т. е. M_1 (-1; -1).

Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака дифференциала 2-го порядка функции Лагранжа d^2L для найденных значений x, y, λ при условии, что $dx^2+dy^2\neq 0$.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\lambda.$$

$$d^2L=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2.$$

$$d^2L=2\lambda(dx^2+dy^2),$$

Для $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ $\boldsymbol{d^2L}<0\Rightarrow$ в точке M_1 (1; 1) функция имеет условный максимум.

Для $\lambda=\dfrac{1}{2}$ $\boldsymbol{d^2L}>0\Rightarrow$ в точке M_2 (-1; -1) функция имеет условный минимум.

$$z_{\max}=z\ \ (1;\ 1)=1+1=2,$$

$$z_{\min}=z\ \ (-1;\ -1)=-1-1=-2.$$

Ответ: $z_{\max}=z\ \ (1;\ 1)=2,\quad z_{\min}=z\ \ (-1;\ -1)=-2.$

Построим область D (рис. 1).

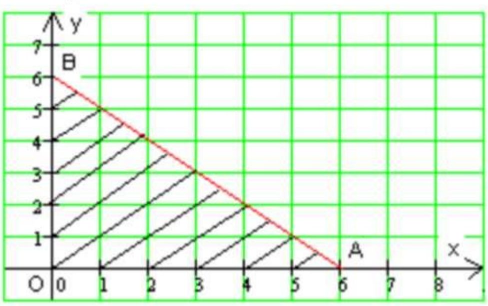

Рисунок 1

Найдем критические точки.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x^2y - x^3y - x^2y^2)'_x = 4xy - 3x^2y - 2xy^2;$$

$$\frac{\partial z}{zy} = (2x^2y - x^3y - x^2y^2)'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2y.$$

$$\begin{cases} xy(4-3x-2y)=0; \\ x^2(2-x-2y)=0. \end{cases}$$

Так как внутри треугольника $x>0,\quad y>0$, то на x è y можно сократить. Тогда

$$\begin{cases} 4-3x-2y=0; \\ 2-x-2y=0. \end{cases} \Rightarrow x_0=1,\quad y_0=\frac{1}{2}.$$

Точка $M_0\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ лежит внутри треугольника.

$$z_0 = z(M_0) = 1\cdot\frac{1}{2}\left(2-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Исследуем функцию на границе области D.

1) [OA]: $y=0,\quad x\in[0;6]$.

z=0, т. е. экстремумов нет.

2) [OB]: $x=0,\quad y\in[0;6]$.

z=0, т. е. экстремумов нет.

3) [AB]: $y=6-x,\quad x\in[0;6]$.

$$z=z(x)=x^2(6-x)(2-x-6+x)=-4x^2(6-x)=4x^3-24x^2.$$

$$z'=\left(4x^3-24x^2\right)'=12x^2-48x=12x(x-4).$$

$12x(x-4)=0$,

$x_1=0$, $x_2=4$.

Так как $x_1=0$ - граничная точка, то берем $x=4$.

$y=2$, т.е. точка $M_2(4;2)$.

$z_2=z(M_2)=-128$.

Находим значения функции в вершинах треугольника.

$z(0;0)=z(6;0)=z(0;6)=0$.

Из всех найденных значений выбираем наибольшее и наименьшее.

$$\max_D z = z\left(1;\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4};\qquad \min_D z = z(4;2)=-128.$$

Ответ: $\max\limits_D z = z\left(1;\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4};\quad \min\limits_D z = z(4;2)=-128.$

Задача 7. Найти неопределенные интегралы. В пунктах а) и б) результаты проверить дифференцированием.

а) $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$; б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx$; в) $\int \frac{dx}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x+5\right)}$; г) $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$.

Решение

а) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1} = \ln\left(e^x+1\right)+C$.

Проверка.

$\left(\ln\left(e^x+1\right)+C\right)' = \frac{1}{e^x+1}\cdot\left(e^x+1\right)' = \frac{e^x}{e^x+1}$.

б) используем формулу интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\cdot dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} = u;\ dx = dv;\ v = x. \\ du = \frac{1}{1+\left(\sqrt{2x-1}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot 2\cdot dx = \frac{dx}{2x\sqrt{2x-1}} \end{array}\right] =$$

$$= x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \int \frac{x\cdot dx}{2x\sqrt{2x-1}} = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-1)}{2\sqrt{2x-1}} =$$

$$= x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C.$$

Проверка.

$$\left(x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C\right)' =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} + x\cdot\frac{1}{1+2x-1}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x-1}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x-1}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} + \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} = \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}.$$

в) $\int \frac{dx}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x+5\right)} = \int \frac{\left(x^2-4x+5\right)-\left(x^2-4x+4\right)}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x+5\right)}dx =$

$$= \int \frac{dx}{x^2-4x+4} - \int \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \int \frac{dx}{(x-2)^2-1}$$

$$= C - \frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x-2).$$

г) используем универсальную тригонометрическую подстановку

$$\int\frac{dx}{3+2\cos x}=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{3+3t^2+2-2t^2}=2\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}+C.$$

Задача 8. Найти объем произведенной продукции за 4 года, если функция Кобба-Дугласа имеет вид: $g(t)=(1+t)e^{3t}$.

Решение.

Определение объема произведенной продукции сводится к вычислению интеграла

$$Q=\int_0^4(1+t)e^{3t}dt=\frac{1}{3}\int_0^4(1+t)e^{3t}dt=\frac{1}{3}(1+t)e^{3t}\Big|_0^4-\frac{1}{3}\int_0^4 e^{3t}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left((1+t)\cdot e^{3t}-\frac{1}{3}e^{3t}\right)\Bigg|_0^4=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+t\right)e^{3t}\Bigg|_0^4=\frac{1}{3}\left(\frac{14}{3}e^{12}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}\left(14e^{12}-2\right)=2{,}53\cdot10^5.$$

4 Варианты контрольных заданий

Задача 1

Дана система линейных алгебраических уравнений. Требуется:

1) решить СЛАУ по формулам Крамера;

2) записать СЛАУ в матричной форме и решить ее матричным способом, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя ее определение.

$$1\ \begin{cases}2x_1-4x_2+3x_3=1,\\ x_1-2x_2+4x_3=3,\\ 3x_1-x_2+5x_3=2.\end{cases}\qquad 2\ \begin{cases}2x_1-x_2+x_3=2,\\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2,\\ x_1-2x_2+x_3=1.\end{cases}$$

$$3\ \begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5,\\ 2x_1-2x_2-x_3=1,\\ x_1+3x_2+4x_3=6.\end{cases}\qquad 4\ \begin{cases}7x_1-5x_2=19,\\ 4x_1+11x_3=41,\\ 2x_1+3x_2+4x_3=13.\end{cases}$$

$$5\ \begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4,\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11,\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11.\end{cases}\qquad 6\ \begin{cases}2x_1+x_2+4x_3=8,\\ x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_3=5.\end{cases}$$

$$7\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -9, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -8, \\ x_1 \qquad + 2x_3 = -3. \end{cases} \qquad 8\ \begin{cases} \qquad x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 \qquad = 0. \end{cases}$$

$$9\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 \qquad + x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 12. \end{cases} \qquad 10\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 \qquad + x_3 = 4. \end{cases}$$

Задача 2

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

Найти:

1) длину ребра A_1A_2;
2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
4) площадь грани $A_1A_2A_3$;
5) объем пирамиды;
6) уравнения прямой A_1A_2;
7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
8) уравнение высоты A_4B, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
9) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

1 $A_1(3,1,4)$, $A_2(-1,6,1)$, $A_3(-1,1,6)$, $A_4(0,4,-1)$.
2 $A_1(3,-1,2)$, $A_2(-1,0,1)$, $A_3(1,7,3)$, $A_4(8,5,8)$.
3 $A_1(3,5,4)$, $A_2(5,8,3)$, $A_3(1,2,-2)$, $A_4(-1,0,2)$.
4 $A_1(9,5,5)$, $A_2(-3,7,1)$, $A_3(5,7,8)$, $A_4(6,9,2)$.
5 $A_1(0,7,1)$, $A_2(2,-1,5)$, $A_3(1,6,3)$, $A_4(3,-9,8)$.
6 $A_1(0,4,5)$, $A_2(3,-2,1)$, $A_3(4,5,6)$, $A_4(3,3,2)$.
7 $A_1(2,-1,7)$, $A_2(3,3,1)$, $A_3(3,2,8)$, $A_4(2,-3,7)$.
8 $A_1(2,1,6)$, $A_2(1,4,9)$, $A_3(2,-5,8)$, $A_4(5,4,2)$.
9 $A_1(3,2,5)$, $A_3(4,0,6)$, $A_3(2,6,5)$, $A_4(6,4,-1)$.
10 $A_1(5,3,7)$, $A_2(-2,3,5)$, $A_3(4,2,10)$, $A_4(1,2,7)$.

Задача 3

Найти пределы функций:

1 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2+2x-16}{x^3-8}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

2 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-3}{6x^3-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x}$.

3 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-3}{6x^3-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{5x^2+3x-26}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\sin 3x}{2x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{3x+2}$.

4 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$; в) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

5 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x}{4x^4-10x^3+7}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+5x-7}{x^3-1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$.

6 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2+5x-42}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$.

7 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x+\sin x}{\operatorname{tg}x}$; д) $\lim\limits_{x\to1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

8 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot\operatorname{tg}2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$.

9 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^3+x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

10 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-36}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+11}-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot \operatorname{ctg}2x}{\sin^2 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x+2}$.

Задача 4

Найти производные от функций:

1 а) $y=\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3}$; б) $y=\sqrt{x}\cdot e^{\frac{x}{2}}$; в) $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$; г) $y=x^{\cos x}$;

д) $x^3y-y^2=6x$; е) $\begin{cases}x=t+\ln\cos t,\\ y=t-\ln\sin t.\end{cases}$

2 а) $y=x-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{5x^5}$; б) $y=\left(x^2+2\right)\cdot e^{2x}$; в) $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$; г) $y=(\operatorname{tg}x)^{\sin 2x}$;

д) $y-x-\operatorname{arctg}y=0$; е) $\begin{cases}x=(2t+3)\cos t,\\ y=3t^3.\end{cases}$

3 а) $y=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^2$; б) $y=x^2\cdot\sqrt{1-x^2}$; в) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; г) $y=(2x)^{\ln^2 x}$;

д) $y^2-x=\cos y$; е) $\begin{cases}x=2t-\sin 2t,\\ y=\sin^3 t.\end{cases}$

4 а) $y=\dfrac{1}{10x^5}-\dfrac{1}{4x^4}$; б) $y=x\cdot\cos^2 3x$; в) $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$; г) $y=(\sin 5x)^x$;

д) $\operatorname{tg}y=3x+5y$; е) $\begin{cases}x=\arcsin\left(t^2-1\right),\\ y=\arccos 2t.\end{cases}$

5 а) $y=6\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x^3}$; б) $y=x\cdot\arccos x-\sqrt{1-x^2}$; в) $y=\ln\sin x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x$;

г) $y=\left(x+x^3\right)^x$; д) $yx=\operatorname{ctg}y$; е) $\begin{cases}x=\dfrac{2-t}{2+t^2},\\ y=\dfrac{t^2}{2+t^2}.\end{cases}$

6 а) $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{9}{\sqrt{x}}$; б) $y=(x+1)\cdot\operatorname{arctg}e^{-2x}$; в) $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$;

г) $y=(x+1)^{\arcsin x}$; д) $y=e^y+4x$; е) $\begin{cases}x=2\cos t-\cos 2t,\\ y=2\sin t-\sin 2t.\end{cases}$

7 а) $y=\ln x-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2x^2}$; б) $y=\sqrt{x}\operatorname{tg}x$; в) $y=\ln\dfrac{e^x}{x^2+1}$;

г) $y=(x+3)^{\sqrt{x+1}}$; д) $\operatorname{arctg} y=4x+5x$; е) $\begin{cases} x=\operatorname{ctg} t, \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

8 а) $y=x-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{3x^3}$; б) $y=6\cos\dfrac{x}{3}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$;

г) $y=(\operatorname{arctg} x)^{x^3}$; д) $y^2=x+\ln\dfrac{y}{x}$; е) $\begin{cases} x=\sin\dfrac{t}{2}, \\ y=\cos t. \end{cases}$

9 а) $y=2x-\dfrac{1}{4x^4}+\dfrac{2}{5x^5}$; б) $y=e^{-x}\cdot\cos\dfrac{x}{2}$; в) $y=\operatorname{arctg} x+\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

г) $y=(2x+1)^{\sin 5x}$; д) $y=1+xe^{y}$; е) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\dfrac{t^3}{3-t}. \end{cases}$

10 а) $y=\dfrac{x^2-5x-1}{x^3}$; б) $y=x\cdot e^{-x^2}$; в) $y=\ln\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

г) $y=\left(\sqrt{x+1}\right)^{\cos 2x}$; д) $\ln y-\dfrac{y}{x}=7$; е) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t+\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

Задача 5

Найти пределы, применяя правило Бернулли-Лопиталя:

1 а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

2 а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)\operatorname{ctg} x$; в) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3(x-1)}}$.

3 а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}-2\right)\operatorname{ctg} x$; в) $\lim\limits_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{1-x}}$.

4 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

5 а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

6 а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

7 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

8 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

9 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\arcsin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

10 а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$.

Задача 6

Найти локальные или глобальные экстремумы функции.

1 $z=(x-2)^2+2y^2$.

2 $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$; $D=\{x=0, y=0, x+y=3\}$.

3 $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

4 $z=xy$; $x+y=1$.

5 $z=\dfrac{1}{2}x^2-xy$; $D:\{x=0, y=8, y=2x^2\}$.

6 $z=1-x+2y-6x^2-y^2$.

7 $z=x^2+3y^2+x-y$; $D:\{x=0, y=0, y-x=1\}$.

8 $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

9 $z=x^2+y^2+xy-5x-4y+10$ при $x+y=4$.

10 $z=3\left(x^2+y^2\right)-y^2+4x$.

Задача 7

Найти неопределенные интегралы. в пунктах а) и б) результаты проверить дифференцированием.

1 а) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+3\sin x}dx$; б) $\displaystyle\int x\cdot 3^x dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; г) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

2 а) $\displaystyle\int x\cdot\sin\left(1-x^2\right)dx$; б) $\displaystyle\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{(2x+3)}{(x-2)(x+5)}dx$; г) $\displaystyle\int\frac{dx}{2+3\cos x}$.

3 а) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$; б) $\int x^2 \cdot e^{-2x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{(x+1)\cdot(x^2+1)}$; г) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

4 а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$;

в) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$; г) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$.

5 а) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{2002}}{1+x^2} dx$; б) $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$;

в) $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx$; г) $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}$.

6 а) $\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x-2\sin x+5}$; б) $\int x^3 \ln xdx$; в) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$; г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$.

7 а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; б) $\int (x^2-2x+3)\cos xdx$;

в) $\int \frac{8xdx}{(x^2+6x+5)\cdot(x+3)}$; г) $\int \cos^2 5xdx$.

8 а) $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{4} \cdot \sec^2 \frac{x}{4} dx$; б) $\int \frac{\ln xdx}{\sqrt[3]{x}}$; в) $\int \frac{dx}{x^4-1}$; г) $\int \sin^2 3xdx$.

9 а) $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \arccos xdx$; в) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx$; г) $\int \frac{dx}{3x+4\sqrt{x}}$.

10 а) $\int \frac{x}{\cos^2 x^2} dx$; б) $\int \sqrt{x} \ln xdx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$; г) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$.

Задача 8

Найти объем произведенной за k лет продукции, если функция Кобба-Дугласа имеет вид:

1 $g(t)=(14+t)\cdot e^t$, $k=5$.

2 $g(t)=(10+t)\cdot e^{5t}$, $k=2$.

3 $g(t)=(25+t)\cdot e^{10t}$, $k=10$.

4 $g(t)=(3+t)\cdot e^{2t}$, $k=1$.

5 $g(t)=(2+t)\cdot e^t$, $k=4$.

6 $g(t)=(1+t)\cdot e^{3t}$, $k=3$.

7 $g(t)=(9+t)\cdot e^{4t}$, $k=2$.

8 $g(t)=(5+t)\cdot e^{t}$, $k=6$.

9 $g(t)=(7+t)\cdot e^{2t}$, $k=3$.

10 $g(t)=(7+t)\cdot e^{2t}$, $k=3$.

Список литературы

1 **Бугров, Я. С.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1980.

2 **Бугров, Я. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - М.: Наука, 1980.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник в 2 т. / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2003. – Т. 1.

4 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика / Р. М. Жевняк, А. Д. Курпук. - Минск: Выш. шк., 1984. - Ч. 1.

5 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика / Р. М. Жевняк, А. Д. Курпук. - Минск: Выш. шк., 1984. - Ч. 2.