МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 ‹‹Прикладная математика›› очной формы обучения

Часть 1

Могилев 2021

УДК 519.6
ББК 22.176
Д48

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «21» января 2021 г.,
протокол № 5

Составители: канд. физ.-мат. наук, доц. И. У. Примак;
канд. физ.-мат. наук, доц. Л. И. Сотская

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

Методические рекомендации содержат необходимые для проведения практических занятий теоретическую часть и задачи, а также задания для самостоятельной работы по курсу «Дискретная математика».

Учебно-методическое издание

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Множества. Задание множеств

На занятии вводятся некоторые полезные логические символы, основные понятия теории множеств и рассматриваются вопросы задания множеств.

1.1 Теоретическая часть [*1–6*]

Для сокращения записей будем использовать ряд логических символов: $a \Rightarrow b -$ означает «из a следует b»; $a \Leftrightarrow b -$ означает « из a следует b и из b следует a» («a и b равносильны»); $\forall -$ означает «для любого», «для каждого»; $\exists -$ означает «существует», «найдется»; $\exists! -$ означает «существует единственный»; $: -$ означает «такое что», «имеет место»; $\in$ и $\notin -$ означают «принадлежность» и «не принадлежность» чему-либо.

Множество – это совокупность некоторых (произвольных) объектов, объединённых по какому-либо признаку. При этом объекты, включаемые во множество, являются различными и их называют его элементами. Принадлежность элемента a множеству A обозначают как $a \in A$; запись $a \notin A$ означает, что $a -$ не элемент A.

Множество можно задать непосредственным перечислением его элементов: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ (в фигурных скобках через запятую перечисляют все элементы множества). Кроме того, множество задается, если указать некоторое свойство, которым обладают элементы этого множества: $A = \{x : P(x)\}$ $\left(A = \{x \mid P(x)\}\right)$, где $x -$элементы множества A; $P(x) -$ свойство (***предикат***), которому удовлетворяют элементы x. Например, отрезок числовой прямой определяется записью $[a,b] = \{x : a \le x \le b\}$.

Общеупотребительны обозначения следующих числовых множеств: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} -$множество натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \{0,1, 2,...\} -$ множество неотрицательных целых чисел; $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2,...\} -$ множество целых чисел; $\mathbb{Q} = \{m/n : m \in Z, n \in N\} -$ множество рациональных чисел; $\mathbb{R} -$ множество действительных чисел.

Множество, не имеющее элементов, называют ***пустым*** и обозначают символом $\varnothing$.

Множество, каждый элемент которого можно индексировать целым числом $1, 2, \ldots, n$, называют ***счетным***. Если n конечно, то множество называют ***конечным***. Число элементов счетного конечного множества A называют его ***мощностью*** и обозначают так: $|A| = n$.

Множество A называют ***подмножеством*** B, если каждый элемент множества A является также элементом множества B. Строгое включение обозначается как $A \subset B$ ($A -$ подмножество множества B, несовпадающее с B). Нестрогое включение обозначается как $A \subseteq B$ ($A -$ подмножество множества B, возможно совпадающее с B). Для известных числовых множеств справедливы следующие утверждения: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Множества называют ***равными,*** если они состоят из одних и тех же элементов. Критерий равенства множеств $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$.

Совокупность всех подмножеств множества A называют его *булеаном* и обозначают 2^A.

Множество, которое имеет несколько экземпляров одного и того же элемента, называют ***мультимножеством***.

Множество, содержащее как подмножества все множества некоторой задачи или теории, называют ***универсальным*** и обозначают U.

Для наглядного изображения множеств используют диаграммы Эйлера–Венна. При этом на такой диаграмме универсальное множество U изображают прямоугольником, а все остальные множества (подмножества U) обычно изображают как окружности или овалы внутри прямоугольника (рисунок 1.1).

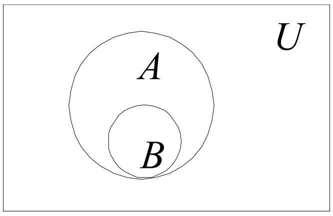

Рисунок 1.1 – Диаграмма Эйлера–Венна в случае $B \subset A \subset U$

1.2 Задачи к занятию **[*4–10*]**

1 Установить, какая из двух записей верна: а) $\{1,2\} \in \{1,2,\{2,3,4\}\}$ или $\{1,2\} \subset \{1,2,\{2,3,4\}\}$; б) $\{1,2\} \in \{1,2,\{1,2\}\}$ или $\{1,2\} \subset \{1,2,\{1,2\}\}$.

2 Указанные множества задать распределением всех своих элементов:

а) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - 3x^2 + 2x = 0\right\}$; б) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x + \dfrac{1}{x} \le 2 \,,\, x > 0\right\}$;

в) $A = \left\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x - 4 \le 0\right\}$; г) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} : \dfrac{1}{4} \le 2^x < 5\right\}$; д) $A = \left\{x \in \mathbb{N} : \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x} < 2\right\}$;

е) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \cos^2 2x = 1 \,,\, 0 < x \le 2\pi\right\}$.

3 Изобразить на координатной плоскости следующие множества:

а) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 2 = 0\right\}$; б) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 0\right\}$;

в) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 - 1)(y + 2) = 0\right\}$; г) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \sqrt{2x+1} \,,\, 2x + 1 \ge 0\right\}$.

4 Каждое из следующих множеств задать в виде некоторого интервала числовой прямой:

а) $\left\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 1\right\}$; б) $\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}, 3x^2 + 2\alpha x + \alpha < 0\right\}$;

в) $\left\{ x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R},\, x = \dfrac{y+1}{y^2+1} \right\}$.

5 Вставить между множествами символ $\in$ или $\subseteq$ так, чтобы получилось истинное утверждение: а) $\{1\}\ \ \{1,\{1,2\}\}$; б) $\{1,2\}\ \ \{1,2,\{1\},\{2\}\}$; в) $\{1,2\}\ \ \{1,2,\{1,2\}\}$; г) 4) $\varnothing\ \ \{1,2,\{1\},\{\varnothing\}\}$; д) $\varnothing\ \ \{\varnothing\}$; е) $\varnothing\ \ \{\{\varnothing\}\}$.

6 Используя представленные в таблице 1.1 значения α, β, γ, δ, ответить на следующие вопросы. Справедливо ли в общем случае утверждение: если $A\alpha B$, и $B\beta C$, и $C\gamma D$, то $A\delta D$? Может ли при некоторых A, B, C и D выполниться набор условий $A\alpha B$, и $B\beta C$, и $C\gamma D$, и $A\delta D$?

Таблица 1.1 − Значения $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Номер варианта	α	β	γ	δ	Номер варианта	α	β	γ	δ
1	$\subseteq$	$\in$	$\subset$	$\subseteq$	11	$\in$	$\in$	$\subset$	$\in$
2	$\in$	$\in$	$\subseteq$	$\in$	12	$\subseteq$	$\in$	$\subseteq$	$\in$
3	$\subseteq$	$\subseteq$	$\in$	$\in$	13	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\in$
4	$\in$	$\subseteq$	$\in$	$\subseteq$	14	$\subseteq$	$\in$	$\in$	$\subseteq$
5	$\subset$	$\subset$	$\in$	$\subseteq$	15	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
6	$\in$	$\in$	$\in$	$\subseteq$	16	$\subseteq$	$\subseteq$	$\in$	$\subset$
7	$\in$	$\subset$	$\subseteq$	$\subset$	17	$\subset$	$\in$	$\subset$	$\in$
8	$\in$	$\in$	$\subseteq$	$\subseteq$	18	$\in$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\in$
9	$\in$	$\subseteq$	$\in$	$\subset$	19	$\subset$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$
10	$\in$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$	20	$\in$	$\in$	$\subset$	$\in$

1.3 Домашнее задание [*4–10*]

1 Перечислить элементы каждого из следующих множеств: а) $\{x : x \subseteq 1\}$; б) $\{x : x \subseteq \{1,2,3\}\}$; в) $\{x : x \subseteq \varnothing\}$.

2 Используя представленные в таблице 1.2 значения α, β, γ, δ, ответить на следующие вопросы. Справедливо ли в общем случае утверждение: если $A\alpha B$, и $B\beta C$, и $C\gamma D$, то $A\delta D$? Может ли при некоторых A, B, C и D выполниться набор условий $A\alpha B$, и $B\beta C$, и $C\gamma D$, и $A\delta D$?

Таблица 1.2 − Значения $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Номер варианта	α	β	γ	δ	Номер варианта	α	β	γ	δ
1	$\in$	$\subset$	$\subset$	$\subset$	6	$\in$	$\subset$	$\in$	$\in$
2	$\subset$	$\subset$	$\in$	$\in$	7	$\in$	$\subset$	$\subset$	$\in$
3	$\in$	$\in$	$\subset$	$\subset$	8	$\subset$	$\in$	$\subseteq$	$\subset$
4	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\in$	9	$\in$	$\subset$	$\subseteq$	$\subset$
5	$\subset$	$\in$	$\in$	$\subset$	10	$\subset$	$\subseteq$	$\in$	$\subset$

3 Изобразить на координатной плоскости следующие множества:

а) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 > 2x + 1\right\}$; б) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2^{x+1} = y^2 + 4 \text{ и } 2^{x-1} \le y\right\}$;

в) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos 2x = \cos 2y\right\}$; г) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}, x \ne 0, y \ne 0\right\}$.

2 Практическое занятие № 2. Операции над множествами. Свойства операций над множествами

На занятии определяются теоретико-множественные операции и их свойства.

2.1 Теоретическая часть [*1–6*]

Объединением множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B: $A \cup B = \left\{x : x \in A \text{ или } x \in B\right\}$.

Пересечением множеств A и B (обозначается $A \cap B$) называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A, и B: $A \cap B = \left\{x : x \in A \text{ и } x \in B\right\}$.

Разностью множеств A и B (обозначается $A \setminus B$) называют множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B: $A \setminus B = \left\{x : x \in A \text{ и } x \notin B\right\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называют множество $A \Delta B = \left(A \setminus B\right) \cup \left(B \setminus A\right)$.

Дополнением (до универсального множества U) множества A (обозначается $\overline{A}$) называют множество всех элементов, которые не содержатся A (но принадлежат U): $\overline{A} = U \setminus A$.

Для произвольных множеств A, B и C, таких что $A, B, C \subset U$, справедливы следующие свойства операций:

1) ***ассоциативность операций***: $A \cup \left(B \cup C\right) = \left(A \cup B\right) \cup C$, $A \cap \left(B \cap C\right) = \left(A \cap B\right) \cap C$;

2) ***коммутативность операций***: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

3) ***законы идемпотентности***: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

4) ***законы дистрибутивности***: $A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right)$, $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$;

5) ***законы поглощения***: $A \cup \left(A \cap B\right) = A$, $A \cap \left(A \cup B\right) = A$;

6) ***законы де Моргана***: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

7) ***закон двойного отрицания***: $\overline{\overline{A}} = A$;

8) ***операции с универсальным и пустым множествами***: $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$;

9) ***свойства дополнения***: $A\cup\overline{A}=U$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$;

10) ***определение разности через пересечение***: $A\setminus B=A\cap\overline{B}$.

2.2 Задачи к занятию [*4–10*]

1 Изобразить диаграмму Эйлера, задающую множества A, B и C $(A\cap B\cap C)\neq\varnothing$, и обозначить на ней штриховкой множество: а) $B\setminus\left(\overline{A\cup C}\right)$; б) $C\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$; в) $\overline{A}\setminus\left(B\cap\overline{C}\right)$; г) $A\cup\left(C\setminus\overline{B}\right)$.

2 Пусть $A=(-1,2]$ и $B=[1,4)$. Найти множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$ и изобразить их на числовой оси.

3 Каждое из следующих утверждений либо доказать, либо показать при помощи диаграмм Эйлера–Венна, что оно не всегда верно: а) $(A\cap B)\setminus A=\varnothing$; б) $(A\cup B)\cap K=A\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{K})$; в) $(A\setminus B)\cup B=A$; г) $(A\cup B)\setminus B=A$.

4 Упростить теоретико-множественные выражения путём алгебраических преобразований: а) $A\Delta(A\Delta B)$; б) $A\cap\left(\overline{A}\cup B\right)$; в) $(A\Delta B)\cup(A\cap B)$; г) $(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)$; д) $(A\cap B)\cup\overline{(A\cup B)}$.

5 Доказать следующие тождества: а) $(A\setminus B)\cup(A\cap B)=A$; б) $A\cap B=A\cap\left(\overline{A}\cup B\right)$; в) $(A\setminus B)\cup\left(\overline{A}\setminus\overline{B}\right)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$; г) $\left(A\setminus\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\setminus B\right)=\left(B\cup\overline{A}\right)\cap\left(A\cup\overline{B}\right)$; д) $A\setminus\left(A\setminus B\right)=A\cap B$; е) $B\cup(A\setminus B)=A\cup B$.

6 Считая U универсальным множеством для данного рассмотрения, найти множество X, удовлетворяющее следующим условиям: а) $A\setminus\mathrm{X}=A$, $A\cup\mathrm{X}=U$; б) $A\cap\mathrm{X}=\varnothing$, $A\cup\mathrm{X}=U$; в) $A\setminus(A\setminus\mathrm{X})=\varnothing$; г) $A\setminus\mathrm{X}=\varnothing$, $A\cup\mathrm{X}=A$; д) $A\setminus(A\setminus\mathrm{X})=\varnothing$, $\overline{A}\cap\overline{\mathrm{X}}=\varnothing$.

2.3 Домашнее задание [*4–10*]

1 Каждое из следующих утверждений либо доказать, либо показать при помощи диаграмм Эйлера–Венна, что оно не всегда верно: а) $(A\setminus B)\cup K=(A\cup K)\setminus(B\cup K)$; б) $\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\subseteq B$; в) $B=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\Rightarrow A=\varnothing$.

2 Упростить теоретико-множественные выражения путём алгебраических преобразований: а) $(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$; б) $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)\cup\cup(A\cap B\cap C)$.

3 Доказать: а) $(A\cup B)\cap K=A\cup(B\cap K)\Leftrightarrow A\subseteq K$; б) $A=B\Leftrightarrow A+B=\varnothing$; в) $A\cup B=\varnothing\Leftrightarrow A=B=\varnothing$; г) $(A\cup B)\setminus B=A\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$; д) $A\setminus B=A\Leftrightarrow B\setminus A=B$; е) $A\cup B=A\setminus B\Leftrightarrow B=\varnothing$; ж) $A\setminus B=A\cap B\Leftrightarrow A=\varnothing$; з) $A\cup B\subseteq K\Leftrightarrow A\subseteq K$ и $B\subseteq K$; и) $A\subseteq B\cup K\Leftrightarrow A\setminus B\subseteq K$; к) $K\subseteq A\cap B\Leftrightarrow K\subseteq A$ и $K\subseteq B$; л) $A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow A=B$; м) $A\subseteq B\subseteq K\Leftrightarrow A\cup B=B\cap K$; н) $A\subseteq B\Rightarrow A\setminus K\subseteq B\setminus K$;

о) $B \subseteq A$ и $K = A \setminus B \Rightarrow A = B \cup K$; п) $A \cup B = A \Rightarrow A \cap B = B$.

3 Практическое занятие № 3. Декартово произведение множеств. Способы задания бинарных отношений

На занятии вводятся понятия упорядоченных пары и набора, декартово произведения множеств, бинарного отношения и рассматриваются способы задания бинарных отношений.

3.1 Теоретическая часть [*1–6*]

Упорядоченная пара на множествах A и B – это множество, обозначаемое записью (a,b), которое определяется не только элементами $a \in A$ и $b \in B$, но и порядком их записи. Элемент a называют первым элементом пары, а b – вторым элементом пары.

Упорядоченный *n****-набор*** (***кортеж***) на множествах $A_1, \dots, A_n$ – это множество, обозначаемое записью $(a_1,...,a_n)$, которое определяется не только элементами $a_1 \in A_1,...,a_n \in A_n$, но и порядком их записи. Элемент a_1 называют первым элементом набора, а a_n – n-м элементом набора.

Прямым (***декартовым***) ***произведением*** множеств A и B называют множество упорядоченных пар, в которых первый элемент каждой пары принадлежит A, а второй принадлежит B: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$.

Прямым (***декартовым***) ***произведением*** множеств $A_1,...,A_n$ называют множество упорядоченных наборов, в которых первый элемент каждого набора принадлежит A_1, n-й принадлежит A_n: $A_1 \times ... \times A_n = \{(a_1,...,a_n) : a_1 \in A_1,...,a_n \in A_n\}$.

Если $A_i = A, \ i = \overline{1,n}$, то это декартово произведение называют n-й ***степенью множества*** A и обозначают A^n (A^2 – ***декартов квадрат***; A^3 – ***декартов куб***).

Пример 1 – Для $A = \{a,b,c\}$ и $B = \{1,2,3\}$ записать $A \times B$, $B \times A$, A^2, B^2.

Решение

$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}$; $B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$; $B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$; $A^2 = A \times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$; $B^2 = B \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3), (2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

Бинарным отношением R из множества A в множество B называют подмножество прямого произведения A и B: $R \subset A \times B$. Если два элемента a и b находятся в отношении R, то этот факт записывают $(a,b) \in R$, или aRb.

При этом множества $D(R)=\{a:(a,b)\in R\}$ и $E(R)=\{b:(a,b)\in R\}$ называют соответственно ***областью определения*** и ***областью значений*** отношения R.

Если $R\subset A\times A$, $a,b\in R$, то множества $R^{-1}=\{(a,b):(b,a)\in R\}$, $\overline{R}=\{(a,b):(a,b)\notin R\}$, $I=\{(a,a):a\in A\}$, $U=\{(a,b):a,b\in A\}$ называют соответственно ***обратным отношением***, ***дополнением отношения***, ***тождественным отношением***, ***универсальным отношением***.

Обобщая отношение на случай множеств $A_1,...,A_n$, имеем ***n-арное отношение*** $R-$ это множество упорядоченных наборов: $R\subset A_1\times...\times A_n=$ $=\{(a_1,...,a_n):a_1\in A_1,...,a_n\in A_n\}$.

Способы задания бинарных отношений – любые способы задания множеств. Отношения, определенные на конечных множествах, обычно задаются: перечислением всех упорядоченных пар, находящихся в отношении R; формулой; графически; матрицей бинарному отношению $R\subset A\times B$, где $A=\{a_1,...,a_n\}$ и $B=\{b_1,...,b_m\}$ соответствует матрица $\|R\|=(r_{ij})$, элементы которой определяются следующим образом:

$$r_{ij}=\begin{cases}1,(a_i,b_j)\in R,\\ 0,(a_i,b_j)\notin R.\end{cases}$$

Пример 2 – На множестве B^2 из предыдущего примера задать бинарное отношение aRa перечислением, формулой и матрицей.

Решение

Рассматриваемое отношение $R\subset B^2$ и в случае aRa имеем $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, $R=\{(a,b):a=b,a,b\in(1,2,3)\},\|R\|=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Пример 3 – На множестве $A=\{1,2,3\}$ задать перечислением и матрицей отношение $R\subset A\times A$, если R означает «быть строго больше».

Решение

Отношение R содержит все пары элементов $a,b\in A$ таких, что $a>b$ (коротко $R=\{(a,b):a,b\in A,a>b\}$), т. е. $R=\{(2,1),(3,2),(3,1)\}$. В этом случае матрица отношения имеет вид $\|R\|=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$.

3.2 Задачи к занятию [*4–10*]

1 Представить перечислением элементов декартово произведение $A\times B$, если: а) $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b\}$; б) $A=\{a,b,c\}$, $B=\{0,1\}$; в) $A=\{b,c\}$, $B=\{2,3\}$; г) $A=\{3,4\}$, $B=\{b,c,e\}$.

2 Записать множества: а) $X\times Y$; б) $Y\times X$; в) $X\times X$; г) $(X\times Y)\cap(Y\times X)$; д) $(X\times X)\setminus(Y\times Y)$, если $X=\{2,5\}$ и $Y=\{2,3\}$.

3 Пусть X – множество точек отрезка $[0;1]$, а Y – множество точек отрезка $[1;2]$. Изобразить графически множество $X\times Y$.

4 Для каждого из следующего бинарных отношений, определённых на множестве R, найти область определения, область значений и нарисовать декартову диаграмму: а) $R=\{(x,y):x\le y\}$; б) $R=\{(x,y):x=y\}$; в) $R==\{(x,y):x^2+4y^2\le 1\}$; г) $R=\{(x,y):x^2=y^2\}$; д) $R=\{(x,y):y=\log_2 x\}$; е) $R==\{(x,y):y=\sin x\}$.

5 Пусть X, Y, Z – подмножества $\mathbb{R}^2$: $X=\{(x;y):x\ge 0\}$, $Y=\{(x;y):y\ge 0\}$, $Z=\{(x;y):x+y\ge 1\}$. Изобразить на координатной плоскости множества: а) $X\cup Y$; б) $X\cap Y$; в) $Y\cup X$; г) $Y\cap X$; д) $X\cup Z$; е) $Y\cup Z$; ж) $Z\cup X$; з) $X\cap Y\cap Z$.

6 Пусть отношение R задано на $M=\{1,2,3,\dots,9\}$. Выписать все элементы R, если: а) $R=\{(a,b):a,b\in M$, $(a+1)$ – делитель $(a+b)\}$; б) $R=\{(a,b):a,b\in M$, a – делитель $(a+b)$, $a\ne 1\}$.

3.3 Домашнее задание [*4–10*]

1 Известно, что $A\times B=\{(a,1);(a;5);(a;8);(m;1);(m;5);(m;8);(k;1);(k;5);(k;8)\}$. Найти множества A и B.

2 Представить перечислением элементов декартово произведение $A\times B\times C$, если: а) $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$, $C=\{c_1,c_2\}$; б) $A=\{\text{т},\text{д}\}$, $B=\{\text{о}\}$, $C=\{?,!\}$; в) $A=\{3,4\}$, $B=\{d,e\}$, $C=\{*\}$; г) $A=\{\text{р},\text{т}\}$, $B=\{a,\text{о}\}$, $C=\{\text{к},\text{м}\}$.

3 Даны бинарные отношения R между элементами множеств A и B. Найти область определения и область значений для данных бинарных отношений: а) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{\{1\},\{1,2\},\{2,5\},\{3\}\}$, $R=\{(x,y)\in A\times B:x\in y\}$; б) $A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{Q}$, $R=\{((a,b),c)\in A\times B:c=a/b\}$; в) $A=\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{Q}$, $R=\{(x,y)\in A\times B:x\cdot y=1\}$; г) $A=\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{Q}$, $R=\{(x,y)\in A\times B:b=2^a\}$.

4 Перечислить все элементы бинарного отношения R и задать его графически: а) $R=\{(x,y):x<y\}$ на множестве $X=\{1,2,3,4,5\}$; б) $R=\{(x,y):y=x+1\}$ на множестве $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

5 Пусть $M = \{1,2,3,4,5,6\}$. Составить матрицы отношений $R_1, R_2, R_3 \in M \times M$, если: а) R_1 – «быть делителем»; б) R_2 – «иметь общий делитель, отличный от единицы»; в) R_3 – «иметь один и тот же остаток от деления на 3».

4 Практическое занятие № 4. Операции над бинарными отношениями. Свойства отношений

На занятии определяются операции над бинарными отношениями и свойства бинарных отношений.

4.1 Теоретическая часть [*1–6*]

Так как всякое бинарное отношение – это множество, то над бинарными отношениями можно выполнять все теоретико-множественные операции, определенные ранее: объединение, пересечение, разность, дополнение.

Пример 1 – Для отношений $R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,3)\}$ и $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ сформулировать универсальное множество U, найти $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_2 \setminus R_1$, $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$.

Решение

Сформулируем универсальное множество как $U = A \times A$, где $A = D(R_1) \cup E(R_1) \cup D(R_2) \cup E(R_2)$, т. е. $A = \{1,2,3\}$, в результате имеем $U = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$. С учетом этого запишем $R_1 \cup R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$, $R_1 \cap R_2 = \{(1,1),(3,3)\}$, $R_1 \setminus R_2 = \{(1,2),(1,3)\}$, $R_2 \setminus R_1 = \{(2,2)\}$, $\overline{R_1} = \{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$, $\overline{R_2} = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$.

Композицией бинарных отношений $R_1 \subset A \times B$ и $R_2 \subset B \times C$ называют множество $R_1 \circ R_1 = \{(a,c): a \in A, c \in C,$ и найдется элемент $b \in B$ такой, что $(a,b) \in R_1$ и $(b,c) \in R_2\}$ (в дальнейшем это будем записывать кратко: $R_1 \circ R_1 = \{(a,c): a \in A, c \in C,\ \exists\, b \in B: (a,b) \in R_1$ и $(b,c) \in R_2\}$).

Ядром отношения R называют композицию вида $R \circ R^{-1}$.

Степенью отношения R называют композицию с самим собой: $R^n = \underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ раз}}$ $\left(R^0 = I, R^1 = R, R^2 = R \circ R, \ldots, R^n = R^{n-1} \circ R\right)$.

Пример 2 – Для отношений $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,3)\}$ и $R_2 = \{(2,4),(2,5),(3,2),(5,5)\}$ найти $R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$, $R_1 \circ R_1^{-1}$, $R_2 \circ R_2^{-1}$, R_1^2, R_2^2.

Решение

В соответствии с определениями имеем $R_1 \circ R_2 = \{(1,4),(1,5),(2,2),(3,2)\}$, $R_2 \circ R_1 = \{(3,3)\}$, $R_1^{-1} = \{(1,1),(3,3)\}$, $R_1 \circ R_1^{-1} = = \{(1,1),(2,3),(3,3)\}$, $R_2^{-1} = \{(5,5)\}$, $R_2 \circ R_2^{-1} = \{(2,5),(5,5)\}$, $R_1^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3)\}$, $R_2^2 = \{(2,5),(3,4),(3,5),(5,5)\}$.

Определим свойства бинарного отношения.

Бинарное отношение R называют ***рефлексивным,*** если $\forall a \in D(R)$ имеет место aRa. При этом все элементы главной диагонали матрицы отношения $r_{ii} = 1$ при $i = \overline{1,n}$.

Бинарное отношение R называют ***антирефлексивным,*** если $\forall a \in D(R)$ имеет место $a\overline{R}a$. При этом все элементы главной диагонали матрицы отношения $r_{ii} = 0$ при $i = \overline{1,n}$.

Бинарное отношение R называют ***симметричным,*** если из $aRb \Rightarrow bRa$. При этом для матриц $\|R\|$ и транспонированной $\|R\|^T$ справедливо $\|R\|^T = \|R\|$.

Бинарное отношение R называют ***антисимметричным,*** если из aRb и $bRa \ \Rightarrow a = b$. При этом справедливо для матриц $\left\|R \cap R^{-1}\right\| = \|R\| * \|R\|^T$, где $\left\|R \cap R^{-1}\right\| -$ матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, знак $*$ означает перемножение элементов одной матрицы на соответствующие элементы второй матрицы.

Бинарное отношение R называют ***транзитивным***, если из aRb и $bRc \ \Rightarrow aRc$. При этом справедливо $R \circ R \subset R$.

Пример 3 – Исследовать свойства отношения, задаваемого матрицей $\|R\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение

Это отношение R:

– антирефлексивно, т. к. элементы главной диагонали матрицы $r_{ii} = 0$ при $i = 1,2,3$;

– симметрично, т. к. справедливо $\|R\|^T = \|R\|$ (матрица $\|R\|$ симметрична);

– нетранзитивно, т. к. не выполняется условие $R \circ R \subset R$. Действительно, матрица $\|R \circ R\| = \|R\| \cdot \|R\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ описывает отношение, которое уже не содержит элементы множества R. Перемножение матриц осуществлялось обычным образом с учетом $0+0=0, 0+1=1+0=1, \; 1+1=1,$ $0\cdot 0=0, \; 1\cdot 0=0\cdot 1=0, \; 1\cdot 1=1$ [6].

4.2 Задачи к занятию [*4–10*]

1 Пусть $R_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x=y^2\right\}$, $R_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x+y\le 5\right\}$, $R_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x^3=y\right\}$, $R_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: y=\sin x\right\}$. Найти всевозможные композиции $R_i\circ R_k$, $i,k=1,2,3,4$.

2 Пусть φ, ϕ, χ – бинарные отношения, определённые на некотором множестве. Доказать следующие утверждения: а) $(\varphi\backslash\phi)^{-1}=\varphi^{-1}\backslash\phi^{-1}$; б) $(\varphi\cap\phi)\circ\chi\subseteq(\varphi\circ\chi)\cap(\phi\circ\chi)$; в) $(\varphi\circ\phi)^{-1}=\phi^{-1}\circ\varphi^{-1}$; г) $(\varphi\cup\phi)^{-1}=\varphi^{-1}\cup\phi^{-1}$; д) $(\varphi\cup\phi)\circ\chi=(\varphi\circ\chi)\cup(\phi\circ\chi)$.

3 Назвать отношения $\overline{R}$, R^{-1}, $R^{(2)}$, R°, R^{*}, если отношение R означает: а) «быть братом»; б) «жить в одном городе»; в) «быть сыном»; г) «быть частью целого». Каковы свойства отношений?

4 Какими свойствами характеризуются следующие отношения на $M=\{1,2,3,\ldots,9\}$: а) $R_1=\left\{(a,b):(a-b)-\text{чётное}\right\}$; б) $R_2=\left\{(a,b):(a+b)-\text{чётное}\right\}$; в) $R_3=\left\{(a,b):(a+1)-\text{делитель }(a+b)\right\}$; г) $R_4=\left\{(a,b):a-\text{делитель }(a+b), a\ne 1\right\}$.

5 Для каждого из следующих бинарных отношений выяснить, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) оно обладает и какими не обладает:

а) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x^2=y^2\right\}$; д) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x+x^2=y+y^2\right\}$;

б) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x^2+y^2=1\right\}$; е) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: x\le y+1\right\}$;

в) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x\cdot y>1\right\}$; ж) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: 3\text{ делится на }(x+y)\right\}$.

г) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: y=|x|\right\}$;

6 Какими свойствами обладает отношение, задаваемое матрицей:

$$\text{а) }\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix};\text{ б) }\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix};\text{ в) }\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix};\text{ г) }\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

4.3 Домашнее задание [*4–10*]

1 Показать, что равенство $\varphi\circ\phi=\phi\circ\varphi$ верно не для любых бинарных отношений.

2 Привести примеры бинарных отношений: а) рефлексивных и транзи-

тивных, но не антисимметричных; б) транзитивных и симметричных, но не рефлексивных; в) рефлексивных и симметричных, но не транзитивных; г) рефлексивных и транзитивных, но не симметричных.

3 Пусть $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $R_1 \subseteq A\times B$, $R_2 \subseteq B^2$. Изобразить R_1 и R_2 графически, найти $\left\|(R_1 \circ R_2)^{-1}\right\|$. Проверить с помощью матрицы $\left\|R_2\right\|$, является ли отношение R_2 рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным, если:

$$\text{а) } \begin{cases} R_1=\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,1),(c,4)\}, \\ R_2=\{(1,1),(2,3),(2,2),(3,4),(1,4),(2,4),(4,2)\}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} R_1=\{(b,2),(a,3),(b,1),(b,4),(c,1),(c,2),(c,4)\}, \\ R_2=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(3,4),(4,4)\}. \end{cases}$$

4 Какими свойствами обладает отношение, задаваемое матрицей:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&1 \\ 1&0&1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 1&0&1&0 \\ 0&1&1&1 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

5 Практическое занятие № 5. Функциональные отношения. Образы и прообразы. Суперпозиция функций

На занятии рассматриваются понятия функционального отношения, отображения, функции, образа и прообраза элемента, области определения и области значений, инъекции, сюръекции и биекции, суперпозиции функций.

5.1 Теоретическая часть [*1–6*]

Отношение $R\subset A\times B$ называют ***функциональным***, если $\forall a\in A$ из aRb и $aRc \;\Rightarrow\; b=c$. При этом отношение называют ***отображением*** из A в B и записывают $R: A\to B$ или $A\xrightarrow{R}B$.

Если задано отображение $R: A\to B$ и aRb – упорядоченная пара, где $a\in A$ и $b\in A$, то элемент a называют ***прообразом*** элемента b, а элемент b называют ***образом*** элемента a.

Отображение $R: A\to B$ называют ***функцией***, если множества A и B числовые.

Областью определения отображения (функции) $R: A\to B$ будем называть $D(R)=\{a\in A:\exists b\in B:(a,b)\in R\}$.

Областью значений отображения (функции) $R: A\to B$ будем называть $E(R)=\{b\in B:\exists a\in A:(a,b)\in R\}$.

Отображение (функцию) $R: A\to B$ называют ***всюду определенным*** (***тотальным***), если $D(R)=A$.

Отображение (функцию) $R: A \to B$ называют ***сюръективным***, если $E(R) = B$.

Отображение (функцию) $R: A \to B$ называют ***инъективным***, если $\forall b \in E(R)\, \exists! a : (a,b) \in R$.

Отображение (функцию) R называют ***биективным*** или ***взаимно однозначным***, если оно сюръективное и инъективное.

Поскольку функции являются частным случаем отношений, для них определена композиция. Композицию функций называют ***суперпозицией***. Пусть $R_1 : A \to B$ и $R_2 : B \to C$, то суперпозиция функций R_1 и R_2 запишется так: $R_1 \circ R_2$.

5.2 Задачи к занятию [*4–10*]

1 Записать множество упорядоченных пар, выражающих отношение «x – делитель y» на множестве целых чисел от 2 до 10 включительно. Является ли это отношение функцией?

2 Пусть $x \in X$, $y \in Y$ и R – отношение между элементами множества, выражаемое соотношением xRy. Указать, в каких случаях R можно рассматривать как функцию. Указать свойства каждого из соотношений, если: а) X – множество студентов, Y – множество учебных дисциплин, xRy означает «x изучает y»; б) X – множество спортсменов, Y – рост в единицах длины, xRy означает «x имеет рост y»; в) X – множество компонентов электрической цепи, Y – множество узлов цепи, xRy означает «x связан с y».

3 Задать несколько типов для функции $f(x)$: а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = \sin x$; г) $f(x) = \lg x$; д) $f(x) = 2x + 1$; е) $f(x) = a^x$. Для каждого из заданных типов функции f определить: а) свойства f; б) является ли f отображением, и если да, то каким; в) имеет ли f обратную функцию f^{-1}, и если имеет, то является ли f^{-1} отображением.

4 Найти область определения и область значений для отображения: а) $h = h = \left\{(x, y) : x^2 + 4y^2 = 1\right\}$; б) $h = \{(x, y) : y \geq 0;\ y \leq x;\ x + y \leq 1\}$; в) $h = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2;\ 0 \leq y \leq 1\}$.

5 Чему равна композиция функций $f(x) = 2^x$ и $g(x) = \log_2 x$? Каковы области определения функций и их композиций?

6 Установить биекцию между заданными в таблице 5.1 множествами.

Таблица 5.1 – Множества

Номер варианта	Множества	Номер варианта	Множества
1	$\{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}$ и $\{(x,y): x^2+y^2 < 1\}$	6	$\mathbb{Q} \cap [0,1]$ и $\mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2$
2	$[0,1]$ и $\mathbb{R}$	7	$(0,1]$ и $[e,\pi]$
3	$[0,+\infty)$ и $[0,1]$	8	$[0,+\infty)$ и (a,b)
4	N и множество многочленов III степени с натуральными коэффициентами	9	Все интервалы на прямой и полуплоскость, расположенная ниже линии $y = x$
5	$\mathbb{R}$ и $[0,+\infty)$	10	$\{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}$ и $\{(x,y): x^2+y^2 < 100\}$

5.3 Домашнее задание [*4–10*]

1 Найти обратное утверждение для заданных отображений: а) $h = \{(x,y):$ "x делит у и $x,y \in \mathbb{N}$"$\}$; б) $h = \{(x,y): 2x \ge 3$у и $x,y \in \mathbb{N}\}$.

2 Найти композицию отношений $h = (h_1 * h_2)$: $h_1 = \{(x,z): 2x \ge 3z\ ;\ x,z \in \mathbb{N}\}$, $h_2 = \{(z,y): 2z \ge 3y;\ z,y \in \mathbb{N}\}$.

3 Установить биекцию между задаными в таблице 5.2 множествами.

Таблица 5.2 –Множества

Номер варианта	Множества	Номер варианта	Множества
1	$\{(x,y): x^2+y^2 = 1\}$ и $[0,1)$	4	$\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap [0,+\infty)$
2	Все окружности на плоскости и $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0,+\infty)$	5	$[0,1]$ и $(2,5)$
3	$(x,y): -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \pi$ и $\mathbb{R}^2$	6	Полуокружности без концевых точек и луч $(0,+\infty)$

6 Практическое занятие № 6. Отношения эквивалентности

На занятии рассматриваются отношение эквивалентности, классы эквивалентности. Фактормножество.

6.1 Теоретическая часть [*1–6*]

Отношением эквивалентности (или просто эквивалентностью) называют бинарное отношение на множестве, если оно рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Если пара (a,b) принадлежит отношению эквивалентности, то элементы a и b называются ***эквивалентными***.

Отношение эквивалентности обозначают знаком $\sim$ (т. е. вместо aRb пишут $a \sim b$).

Пример 1 – Проверить, является ли отношением эквивалентности на множестве всех прямых на плоскости отношение «параллельных прямых».

Решение

Данное отношение является рефлексивным, т. к. любая прямая параллельна сама себе. Также это отношение является симметричным, т. к. если прямая a параллельна прямой b, то справедливо и обратное утверждение – прямая b параллельна прямой a. И, наконец, отношение является транзитивным. Действительно, если прямые a и b параллельны прямой c, то они параллельны друг другу.

Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A и $a \in A$. Подмножество элементов множества A, эквивалентных представителю a, называют ***классом эквивалентности*** для a. Обозначают класс эквивалентности $[a]$ $\left([a]=\{b : b \sim a\}\right)$.

Класс эквивалентности не зависит от выбора представителя.

Классы эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

Если R – отношение эквивалентности на множестве A, то множество классов эквивалентности называют ***фактормножеством*** множества A относительно эквивалентности R и обозначают A/R. Фактормножество является подмножеством булеана: $A/R \subset 2^A$. Мощность фактормножества называют ***индексом разбиения***.

Семейство непустых попарно не пересекающихся подмножеств множества A, объединение которых равно A, называется ***разбиением*** множества А.

Лемма 1. Любое отношение эквивалентности порождает разбиение (его классы эквивалентности образуют разбиение множества A).

Лемма 2. Любое разбиение порождает отношение эквивалентности.

Пример 2 – Найти число отношений эквивалентностей на множестве $A = \{1, 2, 3\}$.

Решение

Число отношения эквивалентности определяется разбиением множества A. Имеем $A=\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}=\{1,2\}\cup\{3\}=\{1,3\}\cup\{2\}=\{1\}\cup\{2,3\}==\{1,2,3\}$.

Итак, имеем пять разбиений множества A и, соответственно, пять отношений эквивалентности.

6.2 Задачи к занятию [*4–10*]

1 Указать отношения эквивалентности: а) быть попутчиком в одном вагоне; б) $a+b=100$, где $a, b \in \{1, 2, \dots, 100\}$; в) $a=b$, где $a, b \in \{1, 4, 8, 9\}$; г) прямая a перпендикулярна прямой b; д) треугольник a подобен треуголь-

нику b; е) Сидоров живёт двумя этажами выше Михайлова; ж) a сердит на b.

2 Доказать, что следующие отношения являются эквивалентностями. Найти фактор множества и индекс разбиения. Установить взаимно однозначное соответствие между фактормножеством и указанным множеством: а) $R_1 = \{(x,y): x,y \in \mathbb{Z};\ x-y-\text{четное}\}$, $\mathbb{Z}/R_1 \sim \{0,1\}$; б) $R_2 = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R}^+;\ x-y \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R}/R_2 \sim [0,1)$; в) $R_3 = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R};\ \sin x = \sin y\}$, $\mathbb{R}/R_3 \sim [-\pi/2, \pi/2]$.

3 Указать, какие из следующих отношений являются рефлексивными, симметричными, транзитивными, отношениями эквивалентности. Для отношений эквивалентности указать разбиение на классы эквивалентности: а) «a/b» на множестве $\mathbb{Z}$; б) «a и b имеют одинаковый остаток при делении на 3» на множестве $\mathbb{Z}$; в) «$a > b$» на множестве $\mathbb{Z}$; г) «a и b имеют одну и туже последнюю цифру» на множестве $\mathbb{Z}$; д) «площадь фигуры a равна площади фигуры b» на множестве фигур на плоскости; е) «сторона и прилежащие углы треугольника a равны стороне и прилежащим углам треугольника b» на множестве треугольников на плоскости; ж) «две стороны треугольника a равны двум сторонам треугольника b» на множестве треугольников на плоскости; з) «два угла треугольника a равны двум углам треугольника b» на множестве треугольников на плоскости.

4 Указать, какие следующие отношений являются рефлексивными, симметричными, транзитивными, отношениями эквивалентности. Для отношений эквивалентности указать разбиение на классы эквивалентности: а) $R = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,c), (c,b), (c,c)\}$ на множестве $M = \{a, b, c\}$; б) $R = \{(b,a), (a,b), (b,c), (a,c), (c,b), (c,a)\}$ на множестве $M = \{a, b, c\}$; в) $R = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c,c)\}$ на множестве $M = \{a, b, c\}$.

5 На множестве $\mathbb{N}$ задано бинарное отношение по следующему правилу: $(x,y) \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда последняя цифра в десятичной записи числа x совпадает с последней цифрой в десятичной записи числа y. Доказать, что данное отношение является отношением эквивалентности. Сколько элементов в фактормножестве $\mathbb{N}/R$?

6 Пусть M – конечное множество. Какие отношения эквивалентности дают наибольший и наименьший индекс разбиения?

7 Пусть R_1 и R_2 – отношения на $\mathbb{N}^2$, определяемые следующим образом: $(a,b)\, R_1\, (c,d)$ тогда и только тогда, когда $a \le c$ и $b \le d$; $(a,b)\, R_2\, (c,d)$ тогда и только тогда, когда $a \le c$ и $b \ge d$. Являются ли R_1 и R_2 отношениями порядка?

8 Пусть $M_1 = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $M_2 = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ – два разбиения множества K. Доказать, что множество всех непустых подмножеств вида $A_i \cap B_j$ также является разбиением множества K. Какое отношение эквивалентности соответствует этому разбиению, если разбиению M_1 соответствует отношение R_1, а разбиению M_2 – отношение R_2?

***6.3 Домашнее задание* [*4–10*]**

1 Доказать, что множества точек двух окружностей эквивалентны.

2 Доказать, что множества точек отрезка и квадрата эквивалентные.

3 Доказать, что каждое из следующих отношений является отношением эквивалентности, и найти классы эквивалентности: а) $R=\{((a,b),(c,d))\in$ $\in\mathbb{N}^2\times\mathbb{N}^2 : a+d=b+c\}$; б) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x^2=y^2\}$.

4 На $\mathbb{R}$ задано бинарное отношение $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x^2+x=y^2+y\}$. Доказать, что R – отношение эквивалентности. Сколько элементов может содержать класс эквивалентности? Существует ли класс эквивалентности, состоящий из одного элемента?

5 Показать, что пересечение отношений эквивалентности, определённых на некотором множестве A, является отношением эквивалентности.

6 Доказать, что если R – отношение эквивалентности, то R^{-1} – также отношение эквивалентности.

7 Практическое занятие № 7. Отношения порядка

На занятии рассматриваются основные понятия, связанные с отношением порядка.

7.1 Теоретическая часть [*1–6*]

Бинарное отношение R называют ***отношением порядка***, если оно антисимметрично и транзитивно. Если при этом отношение антирефлексивно, то его называют отношением ***строгого порядка***. В противном случае имеем отношение ***нестрогого*** порядка.

Для отношений порядка обычно используется инфиксное обозначение $\le$. Элементы a и b, такие что $a\le b$, называются ***сравнимыми*** (относительно $\le$).

Отношение порядка $\le$ на множестве A называют отношением ***линейного порядка***, если для любых элементов a и b множества A выполняется условие $a\le b$ или $b\le a$.

Порядок, не являющийся линейным, называют ***частичным***.

Множество с выделенным на нем отношением порядка $\le$ называется ***упорядоченным множеством***.

Для упорядоченного множества A с порядком $\le$ используется обозначение $\langle A,\le\rangle$.

Элемент a множества $\langle A,\le\rangle$ называют ***минимальным*** (***максимальным***) ***элементом*** A, если для любого элемента x множества A, сравнимого с a, имеет место условие $a\le x$ ($a\ge x$).

Элемент a множества A называют ***наибольшим*** (***наименьшим***), если $(\forall x\in A)\ x\le a\ \ (x\ge a)$.

Для упорядоченного множества $\langle A, \leq \rangle$ справедливы следующие утверждения.

В A существует не более одного наименьшего и не более одного наибольшего элемента.

Если в A существует наименьший (наибольший) элемент, то любой минимальный (максимальный) элемент с ним совпадает.

Пример – Выяснить, является ли отношение делимости на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$ отношением линейного порядка. Указать наибольшие, наименьшие, минимальные, максимальные элементы.

Решение

Отношение делимости R состоит из таких пар (a,b), что b делится на a. Тогда имеем $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$, матрица которого $\|R\| = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$. Анализируя матрицу, можно показать, что отношение делимости рефлексивное, антисимметричное и транзитивное. Это означает, что имеем отношение нестрогого порядка. При этом порядок является частичным, т. к. не выполняется условие линейности, не для всех элементов a и b множества A выполняется условие $a \leq b$ или $b \leq a$ (например, в отношении делимости R нет пар $(2,3)$, $(3,2)$).

Здесь 1 и 4 – это соответственно наименьший и наибольший элементы множества A. При этом, в соответствии с определениями 1, это минимальный элемент, а 3,4 − максимальные элементы на множестве R.

7.2 Задачи к занятию [*4–10*]

1 Указать отношения строгого порядка: а) число a непосредственно следует за числом b, где $a, b \in \{1,2,...,10\}$; б) число a на 4 больше числа b, где $a, b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$; в) между числами a и b находится точно одно число $(a, b \in \{1,2,...,10\})$; г) число a равно числу b, где $a, b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$; д) число a следует за числом b, где $a, b \in \{1,2,...,10\}$; е) число a больше в 2 раза числа b, где $a, b \in \{1,2,...,20\}$; ж) Саша старше Димы.

2 Доказать, что если R – частичный порядок, то R^{-1} – также частичный порядок.

3 Доказать, что отношение $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y \text{ делится на } x\}$ является отношением порядка. Является ли это отношение отношением линейного

порядка? Является ли аналогичное отношение отношением порядка, если его рассматривать на множестве $\mathbb{Z}$?

4 Перечислить всевозможные линейные порядки на множестве $\{1,2\}$, на множестве $\{1,2,3\}$. Высказать предположение о числе линейных порядков на множестве из n элементов.

5 На множестве $M=\{\varnothing,\{1\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ введено отношение R строгого включения: $R=\{(X,Y):X,Y\in M, X\subset Y\}$. Показать, что R – отношение частичного, но не линейного порядка.

6 Пусть F – множество всех непустых конечных подмножеств множества N. Какие элементы упорядоченного множества $\langle F,\subseteq\rangle$ являются минимальными? Доказать, что $\langle F,\subseteq\rangle$ не содержит максимальных элементов.

7 Привести пример упорядоченного множества, имеющего ровно один максимальный (минимальный) элемент, но не имеющего наибольшего (наименьшего) элемента.

7.3 Домашнее задание [*4–10*]

1 Перечислить всевозможные отношения линейного порядка на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$.

2 Доказать, что отношение $R=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: x \text{ делится на } y \text{ или } x<y\}$ является отношением линейного порядка.

3 На множестве всевозможных разбиений данного множества рассмотрим отношение $(M_1,M_2)\in R$, если для любого $A\in M_1$ существует множество $B\in M_2$ такое, что $A\subseteq B$. Доказать, что рассматриваемое отношение является отношением порядка. Является ли оно линейным порядком?

4 Доказать: а) упорядоченное множество содержит не более одного наибольшего (наименьшего) элемента; б) если упорядоченное множество содержит наибольший (наименьший) элемент, то он является единственным максимальным (минимальным) элементом этого множества.

8 Практическое занятие № 8. Нечеткие множества

На занятии рассматриваются определение нечетких множеств, основные характеристики нечетких множеств, включение и равенство нечетких множеств, операции над нечеткими множествами.

8.1 Теоретическая часть [*11–13*]

Под ***нечетким*** множеством A понимают совокупность упорядоченных пар: $A=\{(x,\mu_A(x)):x\in U\}$ $(A=\{\mu_A(x)/x:x\in U\})$, где U – универсальное множество, а $\mu_A(x)$ – функция принадлежности (характеристическая функция), характеризующая степень принадлежности элемента x нечеткому множеству A.

Функция $\mu_A(x)$ принимает значения в некотором вполне упорядоченном множестве M. Множество M называют ***множеством принадлежностей***, часто в качестве M выбирают отрезок $[0,1]$. Если $M=\{0,1\}$, то нечеткое множество можно рассматривать как обычное, четкое множество.

Пусть A – нечеткое множество с элементами $x \in U$ и множеством принадлежностей $M=[0,1]$.

Несущим множителем или носителем нечеткого множества A называют множество $\{x \in U : \mu_A(x) > 0\}$.

Величину $\sup\limits_{x \in U} \mu_A(x) = \max\limits_{x \in U} \mu_A(x)$ называют ***высотой*** нечёткого множества A. Нечёткое множество A ***нормально***, если его высота равна 1. Если высота строго меньше 1, нечёткое множество называют ***субнормальным***.

Нечёткое множество пусто, если $\forall x \in U, \mu_A = 0$. Непустое субнормальное нечёткое множество можно нормализовать по формуле $\mu'_A(x) = \mu_A(x) / \sup\limits_{x \in U} \mu_A(x)$.

Нечёткое множество ***унимодально***, если $\mu_A(x) = 1$ только на одном $x \in U$.

Элементы $x \in U$, для которых $\mu_A(x) = 0,5$, называют точками перехода нечёткого множества A.

Пусть A и B – нечёткие множества, заданные на универсальном множестве U.

A ***содержится*** в B, если для любого x из U функция его принадлежности множеству A будет принимать значение, меньшее или равное, чем функция принадлежности множеству B $\left(A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in U : \mu_A(x) \le \mu_B(x)\right)$.

В случае, если условие $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ выполняется не для всех $x \in U$, говорят о ***степени включения нечёткого множества*** A в B, которое определяется так: $l(A \subset B) = \min\limits_{x \in T} \mu_B(x)$, где $T = \{x \in U : \mu_A(x) \le \mu_B(x); \mu_A(x) > 0\}$.

Два множества называются *равными*, если они содержатся друг в друге: $A = B \Leftrightarrow \forall x \in U \; \mu_A(x) = \mu_B(x)$.

В случае, если значения функций принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ почти равны между собой, говорят о ***степени равенства нечётких множеств*** A и B, например, в виде $E(A = B) = 1 - \max\limits_{x \in T} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|$, где $T = \{x \in U : \mu_A(x) \ne \mu_B(x)\}$.

Множеством α***-уровня*** (α***-сечением***) нечеткого множества $A \subset U$, обозначаемым как A_α, называют следующее четкое множество: $A_\alpha = \{x \in U : \mu_A(x) \ge \alpha\}$, т. е. множество, определяемое следующей характеристической функцией: $\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 0, \mu_A \ge \alpha, \\ 1, \mu_A < \alpha. \end{cases}$ При этом справедливо свойство, если $\alpha_1 < \alpha_2$, то $A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}$.

Нечёткое множество A можно разложить по его множествам α-уровня следующим образом: $A = \bigcup_{\alpha} \alpha A_{\alpha}$, где αA_{α} – произведение α на множество A_{α}. При умножении нечеткого множества на $\alpha > 0$ такое, что $\alpha \max_{x \in U} \mu_A(x) \le 1$, для нечеткого множества αA функция принадлежности определяется следующим образом: $\mu_{\alpha A}(x) = \alpha \mu_A(x)$.

Определим операции над нечеткими множествами при $M = [0,1]$.

Пересечением нечётких множеств A и B называют наибольшее нечёткое подмножество, содержащееся одновременно в A и B: $\mu_{A \cap B}(x) = = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$.

Произведением нечётких множеств A и B называют нечёткое подмножество с функцией принадлежности $\mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$.

Объединением нечётких множеств A и B называют наименьшее нечёткое подмножество, содержащее одновременно A и B $\mu_{A \cup B}(x) = \max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$.

Суммой нечётких множеств A и B называют нечёткое подмножество с функцией принадлежности $\mu_{AB}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$.

Отрицанием множества A при $M = [0,1]$ называют множество $\overline{A}$ с функцией принадлежности $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ для $\forall x \in U$ каждого.

Разностью нечётких множеств A и B называют нечёткое подмножество с функцией принадлежности $\mu_{A \setminus B}(x) = \mu_{A \cap \overline{B}}(x) = \min\left(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\right)$.

Свойства операций над нечеткими множествами почти не отличаются от рассмотренных ранее свойств операций над обычными множествами.

8.2 Задачи к занятию [*12, 13*]

1 Пусть $U = \{0,1,2,...,120\}$ – возможный возраст человека. Выступая в роли эксперта, построить графики функций принадлежности следующих нечетких множеств: A – молодой, B – старый, C – очень молодой, D – нестарый. Записать множества A, B, C, D. Сравнить полученные графики с графиками коллег и объяснить причины различий, если они имеются.

2 Пусть U – множество дисциплин, изучаемых в текущем году. Присвоить номер каждой дисциплине и, выступая в роли эксперта, записать нечеткие множества: A – мне нравится эта дисциплина, B – я не понимаю эту дисциплину, C – мне не нравится эта дисциплина, D – я хотел бы изучать эту дисциплину глубже. Представить разложения каждого из нечетких множеств по множествам уровня.

3 Дано универсальное множество $U = \{5,...,15\}$, $\mu_A(7) = 1$, $\mu_A(5) = 0$. Как может задаваться нечёткое множество A?

4 $U = \mathbb{R}^* \cup \{0\}$ – множество неотрицательных действительных чисел. Заданы функции принадлежности нечётких множеств A, B, C и D:

а) $\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le x \le 5, \\ 0, & \text{если} \quad x > 5; \end{cases}$

б) $\mu_B(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x-5}{5}}, & \text{если} \quad 5 \le x \le 10, \\ 0, & \text{если} \quad 0 \le x \le 5 \text{ или } x > 5; \end{cases}$

в) $\mu_C = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le x \le a_1, \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & \text{если} \quad a_1 \le x \le a_2, \\ 1, & \text{если} \quad x > a_2; \end{cases}$ г) $\mu_D = \dfrac{1}{1+2x^2}$, $0 \le x < \infty$.

Для каждого нечёткого множества: построить график функции принадлежности; записать разложение по множествам уровня; записать приближённое дискретное разложение, разбив отрезок $[0,1]$ на пять частей.

5 Задано два нечётких подмножества A и B множества $M = \{1,2,3,4,5,6,7\}$: $A = \{(0.3,2),(0.7,4),(0.9,6)\}$, $B = \{(0.2,1),(0.4,3),(0.1,4),(0.9,6),(0.2,5),(0.5,7)\}$. Найти $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cup \overline{B}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$.

6 Доказать закон де Моргана для нечетких множеств $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

7 Определить степень включения нечёткого множества A в нечёткое множество B, если $A = \{(0.2,x_2),(0.7,x_3),(0.5,x_5)\}$, $B = \{(0.9,x_1),(0.4,x_2),(0.5,x_3),(0.8,x_5)\}$.

8.3 Домашнее задание [*12, 13*]

1 Пусть U = {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}. Выступая в роли эксперта, записать следующие нечеткие множества: A – начало недели, B – середина недели, C – конец недели, D – не начало, но и не конец недели. Есть ли среди определенных функций принадлежности унимодальные?

2 Пусть U – цены автомобилей, $4 \le u \le 5000$ (у. е.). Выступая в роли эксперта, построить графики функций принадлежности следующих нечётких множеств: A – цены автомобилей для среднего класса, B – цены автомобилей для богатых людей, C – цены автомобилей для небогатых людей. Для каждой кривой найти подходящую формулу, записать функции принадлежности аналитически. Записать разложение по множествам уровня каждого из нечётких множеств. Записать приближённое дискретное разложение, разбив отрезок $[0,1]$ на 10 равных частей.

3 Дано универсальное множество $U = [0,100]$ – жизненный опыт человека. Зрелость – $[30,100]$, мудрость – $[60,100]$. Определить точки перехода.

4 Доказать закон поглощения для нечётких множеств $A \cup A \cap B = A$, $A \cap (A \cup B) = A$.

5 Заданы нечёткие подмножества A, B, C множества $M = \{1,2,3,4,5,6\}$: $A = \{(0.1,3),(0.6,4),(0.7,5)\}$, $B = \{(0.3,2),(0.4,6),(0.1,1)\}$, $C = \{(0.2,2),(0.3,4),(0.7,1),(0.1,5)\}$. Найти $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cup \overline{B}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$.

6 Дано универсальное множество $U = \{5,...,15\}$, $\mu_A(7) = 1$, $\mu_A(5) = 0$. Как может задаваться нечёткое множество A?

9 Практическое занятие № 9. Нечеткие отношения

На занятии рассматриваются понятие нечеткого бинарного отношения, операции над нечеткими отношениями и их свойства, композиция нечетких отношений, свойства нечетких отношений.

9.1 Теоретическая часть [*11–13*]

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – нечеткие подмножества универсальных множеств $U_1, U_2, ..., U_n$. Тогда $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ есть произведение подмножеств, лежащих в универсуме $U = U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ с функцией принадлежности $\mu_A(x_1, x_2, ..., x_n) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), ..., \mu_{A_n}(x_n)\}$.

Нечётким бинарным отношением на множествах X и Y называют нечёткое подмножество множества $X \times Y$. Функция принадлежности $\mu_R(x,y)$ показывает степень выполнения отношения R между элементами $x \in X$ и $y \in Y$. Задание бинарного нечёткого отношения R состоит в задании всех троек $(x, y, \mu_R(x,y))$, где $x \in X$ и $y \in Y$, $(x,y) \in X \times Y$, $\mu_R(x,y) \in [0,1]$. Нечёткое отношение R можно задать матрицей $\|R\| = (\mu_{ij})$, где $\mu_{ij} = \mu_A(x_i, y_j)$, если множества X и Y конечны.

Так как нечёткое отношение – это нечёткое множество, то над нечеткими бинарными отношениями можно выполнять все операции, определенные ранее для нечетких множеств: объединение, сумма, пересечение, произведение, разность, дополнение.

Пусть R_1 есть нечеткое отношение в $X \times Y$; $R_2 -$ нечеткое отношение в $Y \times Z$. **(Max-min)** – ***композицией отношений*** R_1 и R_2 называют нечеткое отношение, обозначаемое $R_1 \circ R_2$, функция принадлежности которой определяется как $\mu_{R_1 \circ R_2} = \max\limits_{y}\left[\min\{\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)\}\right]$.

(Max-min) – композиция удовлетворяет следующим условиям:

– ассоциативности $(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$;

– дистрибутивности относительно объединения $R_1 \circ \left(R_2 \cup R_3\right) = \left(R_1 \circ R_2\right) \cup \left(R_1 \circ R_3\right)$;

– недистрибутивности относительно пересечения $R_3 \circ \left(R_2 \cap R_1\right) \neq \left(R_3 \circ R_2\right) \cap \left(R_3 \circ R_1\right)$;

– монотонности $A \subset B \Rightarrow R \circ A \subset R \circ B$.

Понятие (Max-min) – композиции можно обобщить, если операцию min заменить на любую другую, для которой выполняется свойство ассоциативности и монотонного неубывания по каждому аргументу.

Различные типы нечётких отношений определяются с помощью свойств, аналогичных свойствам обычных отношений:

1) нечёткое отношение R на $X \times X$ называют ***рефлексивным***, если $\mu_R(x,x) = 1 \ \left(R : x \approx y\right)$;

2) нечёткое отношение R на $X \times X$ называют ***антирефлексивным***, если $\mu_R(x,x) = 0 \ \left(R : x \gg y\right)$;

3) нечёткое отношение R на $X \times Y$ называют ***симметричным***, если $\mu_R(x,y) = \mu_{R^{-1}}(x,y)$ (матрица отношения R должна быть симметрической);

4) нечёткое отношение R называется ***транзитивным***, если $\mu_R(x,z) \geq \max\limits_y \left[\min\left(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)\right)\right]$ для любых $x, y, z \in X$ и $\left(x,y\right), \left(y,z\right), \left(x,z\right) \in X \times Y$.

9.2 Задачи к занятию [*12, 13*]

1 На множествах $X = \left\{x_1, x_2, x_3\right\}$ и $Y = \left\{y_1, y_2, y_3, y_4\right\}$ заданы отношения матрицами $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,8 & 0,9 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,1 & 1 \\ 0,9 & 0,4 & 0,7 & 0 \end{pmatrix}$, $R_3 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,9 & 0,4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти: а) $R_1 \cap R_2$; б) $R_1 \cup R_3$; в) $R_1 \cap R_2 \cap R_3$; г) $R_1 \cap \left(R_2 \cup R_3\right)$; д) $R_1 \cdot R_2$; е) $\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2$; ж) $R_1 \Delta R_3$.

2 На множествах $X = \left\{x_1, x_2, x_3\right\}$ и $Y = \left\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\right\}$ задано отношение матрицей $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 1 \\ 1 & 0,5 & 0,4 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 0 & 0,5 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}$. На множествах $Y = \left\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\right\}$ и $Z = \left\{z_1, z_2, z_3, z_4\right\}$ задано отношение матрицей $R_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,8 & 0 & 0,7 \\ 0,7 & 0 & 0,5 & 0,8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0 & 0,4 \\ 0,9 & 0,7 & 0,8 & 0,7 \end{pmatrix}$.

На множествах $Z=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$ и $T=\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\}$ задано отношение матрицей $R_3=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 1 \\ 0{,}9 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1 & 0 & 0{,}4 & 0{,}9 \end{pmatrix}$. Найти (max-min)-композицию: а) $R_2 \circ R_1$; б) $R_3 \circ R_2 \circ R_1$; в) $\overline{R}_2 \bullet \overline{R}_1$; г) $(R_3 \circ R_2) \cap (\overline{R}_3 \circ \overline{R}_2)$; д) $R_2 \cdot R_1$.

3 Определить, какие из нижеперечисленных нечётких бинарных отношений: симметричны; рефлексивны; транзитивны. На множествах $M=\{A,B,C,D,E\}$ отношения заданы матрицами

$$R_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ R_2=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 1 & 0 & 0 & 0{,}2 & 1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 1 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix},\ R_3=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 1 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}3 & 1 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}8 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 & 1 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix},\ R_5=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R_6=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0 & 1 & 0{,}8 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 1 \\ 1 & 0 & 0{,}4 & 0 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 Проверить, что отношения, заданные на множествах $M=\{A,B,C,D,E\}$ матрицами

$$R_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix},\ R_3=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}8 & 1 \end{pmatrix},$$

действительно нечёткие отношения порядка. Какие из них совершенно нечёткие отношения порядка? Какие из них устанавливают полный порядок, а какие нет?

9.3 Домашнее задание [*12*, *13*]

1 Какие из шести отношений упражнения 4 в подразд. 9.2 антисимметричные, а какие совершенно антисимметричные?

2 Проверить, что следующие отношения, заданные на множествах $M=\{A,B,C,D,E,F\}$ матрицами

$$R_1=\begin{pmatrix}1&1&0,8&0,3&0,7&1\\1&1&0,8&0,3&0,7&1\\0,8&0,8&1&0,3&0,7&0,8\\0,3&0,3&0,3&1&0,3&0,3\\0,7&0,7&0,7&0,3&1&0,7\\1&1&0,8&0,3&0,7&1\end{pmatrix},\ R_2=\begin{pmatrix}1&1&0&0&c&0\\1&1&0&0&c&0\\0&0&1&b&0&a\\0&0&b&1&0&a\\c&c&0&0&1&0\\0&0&a&a&0&1\end{pmatrix},$$

$$R_3=\begin{pmatrix}1&0,1&0,1&0&0&0,5\\0,1&1&0,6&0&0&0,1\\0,1&0,6&1&0&0&0,1\\0&0&0&1&0,3&0\\0&0&0&0,3&1&0\\0,5&0,1&0,1&0&0&1\end{pmatrix}$$, есть отношения подобия $0\le a\le b\le c\le 1$.

10 Практическое занятие № 10. Комбинаторные задачи

На занятии рассматриваются основные правила и понятия комбинаторики. Перестановки. Размещения. Сочетания.

10.1 Теоретическая часть [*1–3, 5, 6*]

Правило суммы. Пусть A и B – конечные непересекающиеся множества такие, что $|A|=k$, $|B|=m$. Тогда $|A\cup B|=|A|+|B|=k+m$.

Правило произведения. Пусть A и B – конечные непересекающиеся множества $\left(|A|=k,|B|=m\right)$. Тогда $|A\times B|=|A|\cdot|B|=k\cdot m$.

Пусть $E=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ – конечное множество, $|E|=n$.

Упорядоченный набор из n элементов множества E называется ***перестановкой без повторений***. Число перестановок без повторений $P_n=P(n)=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n=n!$.

Пусть множество E состоит из n элементов m различных типов; k_i – количество элементов i-го типа, $n=k_1+k_2+...+k_m$. Перестановки из всех этих элементов с точностью до порядка следования однотипных элементов называют ***перестановками с повторениями***. Число всех перестановок с повторениями $\overline{P}_n\left(k_1,k_2,...,k_m\right)=\dfrac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$.

Упорядоченный набор из k элементов n элементного множества E называется ***размещением*** (***без повторений***). Число всех размещений (без повторений) $A_n^k=A(n,k)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Размещение элементов в предположении, что каждый элемент может участвовать в размещении несколько раз, называется ***размещением с повторениями***. Число размещений (с повторениями) $\overline{A}_n^k = n^k$.

Неупорядоченное подмножество, состоящее из k элементов n элементного множества называется ***сочетанием из*** n ***по*** k. Число элементов из n по k $C_n^k = C(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Неупорядоченные наборы из k элементов n элементного множества, в которых каждый элемент может участвовать несколько раз, называются ***сочетаниями с повторениями***. Число сочетаний из n по k $\overline{C}_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$.

10.2 Задачи к занятию [*5–10*]

1 В скачках участвуют 12 лошадей. Букмекер принимает ставки на призовые тройки лошадей. Сколько вариантов ему придется рассмотреть?

2 В скачках участвуют 11 лошадей. Букмекер принимает ставки на призовые тройки лошадей. Сколько вариантов ему придется рассмотреть, если для получения выигрыша достаточно указать лошадей, пришедших первыми, в произвольном порядке?

3 Электронное табло состоит из 1000 лампочек. Сколько различных рисунков можно изобразить на этом табло?

4 В ряд выложены 9 белых шаров. Сколько существует способов покрасить пять из них в черный цвет?

5 В ряд выложены 8 белых шаров. Сколько существует способов покрасить четыре из них в различные цвета?

6 В ряд стоят 8 солдат. Сколькими способами можно отправить их в наряд, если каждого солдата можно отправить на кухню, в уборную, на пост или никуда не отправлять?

7 Найти количество способов составить поезд из восьми пронумерованных пассажирских вагонов, использовав все вагоны.

8 Найти количество способов составить поезд из восьми пронумерованных (числами от 1 до 8) пассажирских вагонов, использовав все вагоны, чтобы первые три вагона имели номера 1, 2, 3 соответственно.

9 Найти количество способов составить поезд из восьми пронумерованных пассажирских вагонов, чтобы нумерация вагонов шла в порядке возрастания. Часть вагонов можно не использовать.

10 Найти количество способов разложить 11 апельсинов в подарки пяти детям. Апельсины одинаковые, дети – разные!

11 В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошло 6 человек. Найти количество способов им выйти из лифта, если никто не вышел ниже третьего этажа.

12 В лифт 10-этажного дома на первом этаже вошло 5 человек. Найти количество способов им выйти из лифта, если никто не вышел ниже третьего этажа и все вышли на разных.

13 Хулиган Вася зашел в подъезд 12-этажного дома с семью петардами и взорвал каждую из них на площадке какого-нибудь этажа около лифта. Сколькими способами Вася мог это сделать, если ни на одном этаже не было взорвано более одной петарды? Все петарды одинаковые.

14 Хулиган Вася зашел в подъезд 10-этажного дома с восемью петардами и взорвал каждую из них на площадке какого-нибудь этажа около лифта. Сколькими способами Вася мог это сделать? Все петарды одинаковые.

15 У ребенка есть 7 карточек с различными буквами. Сколько слов (даже бессмысленных) он сможет составить?

16 У ребенка есть 5 карточек с различными буквами и две карточки с одной и той же буквой «А». Сколько слов (даже бессмысленных) он сможет составить?

17 У ребенка есть 7 карточек: 4 с буквами «А» и 3 с буквами «М». Сколько слов (даже бессмысленных) он сможет составить?

18. Сколько существует в Омске шестизначных телефонных номеров, все цифры в которых нечетны?

19 Инспектор ГИБДД решил, что будет останавливать каждую машину, если он ранее не останавливал автомобиль с теми же тремя цифрами в номере (неважно, в каком порядке). Сколько машин ему придется остановить?

20 Инспектор ГИБДД решил, что будет останавливать каждую машину, все цифры в номере которой различны, если он ранее не останавливал автомобиль с теми же тремя цифрами в номере (неважно, в каком порядке). Сколько машин ему придется остановить?

21 Найти количество различных наборов из шести карт в руке карточного игрока «в дурака». В колоде 36 карт.

10.3 Домашнее задание [*5–10*]

1 В ящике 10 качественных и 5 бракованных деталей. Опыт состоит в выборе только одной детали. Событие A – вынули качественную деталь. Событие B – вынули бракованную деталь. Какое утверждение для этих событий будет неверным: а) событие A невозможно; б) событие B невозможно; в) события A и B равновероятны; г) события A и B несовместимы?

2 В слове SHUT меняют местами буквы. Чему равно количество всех возможных различных слов?

3 Чему равно количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) четырех томов из 7-томного собрания сочинений А. П. Чехова?

4 Чему равно количество различных трехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв слова ЦВЕТОК (все буквы в комбинации различны)?

5 Чему равно количество различных двухбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв слова КОМАР (все буквы в комбинации различны)?

6 В первой урне 4 белых и 6 черных шаров. Во второй урне 1 белый и 9 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Сколькими способами можно выбрать один белый шар?

7 На пути автомобиля – 10 светофоров. Автомобиль либо останавливается на красный свет, либо проезжает светофор на зеленый цвет без остановки. Каково число способов проехать этот путь?

8 Сколькими способами победитель «Поля чудес» может выбрать четыре приза из 20 имеющихся?

9 У каждого человека по 32 гнезда для зубов. Сколько разных наборов зубов может быть у человека (зуб или есть, или нет)?

10 Сколькими способами можно из 30 участников собрания выбрать председателя, заместителя председателя и секретаря?

11 В русском языке 33 буквы. Сколько трехбуквенных слов (не обязательно осмысленных) можно составить?

12 Сколько сторон и диагоналей у 100-угольника?

13 Есть 8 разных конфет. Сколькими способами можно раздать их по одной 8 студенткам?

14 Инспектор ГИБДД решил, что будет останавливать каждую машину, в номере которой все цифры четны и различны, если он ранее не останавливал автомобиль с тем же трехзначным числом в номере. Сколько машин ему придется остановить?

11 Практическое занятие № 11. Перестановки

На занятии рассматриваются вопросы перестановок (подстановок), графического представления перестановок, инверсии, генерации перестановок.

11.1 Теоретическая часть [*1–3, 5, 6*]

Перестановкой множества A называют произвольное взаимнооднозначное отображение $\alpha : A \to A$.

Перестановка конечного множества A определяется таблицей, первая строка которой состоит из элементов A, а вторая строка – из образов этих элементов. Например, для множества $A = \{a, b, c, d\}$ и $\alpha(a) = d$, $\alpha(b) = a$, $\alpha(c) = c$, $\alpha(d) = b$ перестановку можно записать как $\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & b \end{pmatrix}$ или $\alpha = \begin{pmatrix} d & a & c & b \end{pmatrix}$.

Функцию $\alpha : A \to A$, задаваемую таблицей, называют ***подстановкой***.

Произведением подстановок α и β называется суперпозиция $\alpha \circ \beta$.

Тождественная подстановка – это подстановка e: $e(a) = a$ для $\forall a \in A$.

Обратная подстановка – это обратная функция.

Подстановки представляют графически, проводя стрелки от каждого элемента $a \in A$ к элементу $\alpha(a) \in A$.

Говорят, что перестановка $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ***лексикографически*** предшествует перестановке $(b_1, b_2, ..., b_n)$, если $\exists k \le n \; a_k < b_k$ и $\forall i < k \; a_i = b_i$. Также говорят, что перестановка $(a_1, a_2, ..., a_n)$ антилексикографически предшествует перестановке $(b_1, b_2, ..., b_n)$, если $\exists k \le n\ a_k > b_k$ и $\forall i > k\ a_i = b_i$.

Если в перестановке $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$, где $a_i \in A, i = \overline{1, n}$, для элементов a_i и a_j имеет место неравенство $a_i > a_j$ при $i < j$, то пару (a_i, a_j) называют ***инверсией***. Инверсию (a_i, a_j) называют j-***инверсией*** перестановки α.

Пусть S_n – множество перестановок. ***Вектором инверсий перестановки*** $\alpha \in S_n$ называют последовательность целых чисел $(d_1, d_2, ..., d_n)$ такую, что d_j есть число j-инверсий перестановки α.

11.2 Задачи к занятию **[*5–10*]**

1 Доказать, что число перестановок $\alpha \in S_n$ $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} ... n^{\lambda_n}$ равно $\dfrac{n!}{\left(1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} ... n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! ... \lambda_n!\right)}$.

2 Доказать, что перестановки $\alpha, \beta \in S_n$ являются перестановками одного и того же типа тогда и только тогда, когда существует перестановка $\gamma \in S_n$ такая, что $\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$.

3 Перестановка $\alpha \in S_n$ называется инволюцией, если $\alpha \cdot \alpha = e$. Доказать, что $\alpha \in S_n$ является инволюцией тогда и только тогда, когда она имеет тип $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2}$ ($\lambda_1 + 2\lambda_2 = n$), и что произвольная перестановка является суперпозицией двух инволюций.

4 Решить уравнения: 1) $A \cdot X = B$; 2) $X \cdot A = B$; 3) $A \cdot X \cdot B = E$ и найти $A \cdot B$, B^{-1}, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 12345 \\ 14523 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23514 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 12345 \\ 41253 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12345 \\ 34152 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 12345 \\ 51324 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12345 \\ 25134 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 12345 \\ 35214 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12345 \\ 52431 \end{pmatrix}$.

5 Для перестановки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ определим инверсивный вектор $(d_1, d_2, ..., d_n)$, где $d_1 = \left|\{ j < i : a_j > a_i \}\right|$. Доказать, что инверсивный вектор однозначно определяет перестановку.

6 Доказать, что каждое из чисел $0, ..., n! - 1$ можно однозначно представить в виде $j = \sum_{k=1}^{n-1} d_k k!$, где $0 \le d_i \le i$, причём последовательности $d_{k-1}, ..., d_1$, соответствующие очередным числам, появляются в лексикографическом порядке. Предложить алгоритм построения последовательности $(d_{k-1}, ..., d_1)$, соответствующей числу j.

7 Сделать перестановки множества $A=\{1,2,3\}$ в лексикографическом и антилексикографическом порядке. Изобразить перестановки графически.

8 На множестве $A=\{2,6,5,8,7,4,3,1\}$ выполнить перестановки в лексикографическом порядке. Изобразить перестановки графически.

9 На множестве $A=\{1,7,8,9\}$ выполнить перестановки в лексикографическом порядке. Изобразить перестановки графически.

10 Определить следующие в лексикографическом и антилексикографическом порядке перестановки для: а) $n=3$ $(2,3,1)$; б) $n=5$ $(2,5,4,3,1)$; в) $n=7$ $(4,5,2,3,1,6,7)$; г) $n=8$ $(2,4,3,6,8,7,5,1)$; д) $n=9$ $(1,2,3,9,8,7,6,5,4)$; е) $n=13$ $(12,4,3,5,13,11,10,9,8,7,6,2,1)$; ж) $n=15$ $(1,2,12,14,9,8,15,10,13,11,10,7,6,5,4,3)$.

11 Для перестановки $(4,3,5,2,1,7,8,6,9)$ записать вектор инверсий.

12 Восстановить перестановку $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_5)$, имеющую вектор инверсий $d=(0,0,2,1,1)$.

11.3 Домашнее задание [*5–10*]

1 Доказать, что асимптотическое значение (для $n\to\infty$) среднего числа транспозиций, приходящихся на каждую перестановку, полученную при помощи алгоритма генерации перестановок, равно $\cosh 1=1,543...$ $\left(\cosh x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)$.

2 Решить уравнения: 1) $A\cdot X=B$; 2) $X\cdot A=B$; 3) $A\cdot X\cdot B=E$ и найти $A\cdot B$, B^{-1}, если:

а) $A=\begin{pmatrix}12345\\23514\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}12345\\35241\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}12345\\25143\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}12345\\24351\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}12345\\43125\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}12345\\13251\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}12345\\31524\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}12345\\23451\end{pmatrix}$.

3 Сделать перестановки множества $A=\{1,2,3,4\}$ в лексикографическом и антилексикографическом порядке. Изобразить перестановки графически.

4 Для перестановки $(5,2,7,3,1,8,6,9,4)$ записать вектор инверсий. Восстановить перестановку $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_5)$, имеющую вектор инверсий $d=(0,1,2,0,1)$.

12 Практическое занятие № 12. Бином Ньютона

На занятии рассматриваются бином Ньютона, свойства биномиальных коэффициентов, треугольник Паскаля, полиноминальная теорема.

12.1 Теоретическая часть [*1–3, 5, 6*]

Основная формула для числа сочетаний $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ позволяет получить следующие тождества: 1) $C_n^m = C_n^{n-m}$; 2) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$; 3) $C_m^i C_i^n = C_m^n C_{m-n}^{i-n}$.

Числа сочетаний $C(m,n)$ называют ***биноминальными коэффициентами***.

Формула бинома Ньютона имеет вид: $\left(a+b\right)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}$.

Биноминальные коэффициенты обладают следующими свойствами: $\sum\limits_{m=0}^{n} m C_n^m = n2^{n-1}$; $C_{n+m}^k = \sum\limits_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}$; $\sum\limits_{n=0}^{m} C_n^m = 2^n$; $\sum\limits_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m = 0$.

Биноминальные коэффициенты можно выписать в виде треугольной таблицы, которая носит название ***треугольника Паскаля*** (рисунок 12.1).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \qquad n=1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \qquad n=2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \qquad n=3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \qquad n=4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \qquad n=5
\end{array}
$$

Рисунок 12.1 – Треугольник Паскаля

В n-й строке треугольника Паскаля стоят биноминальные коэффициенты, причем каждый коэффициент, кроме двух крайних, равных 1, – это сумма соответствующих коэффициентов из предыдущей строки (тождество 2). Обобщением бинома Ньютона на случай k слагаемых является полиноминальная теорема: $\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_k\right)^n = \sum\limits_{\substack{r_1 \ge 0, \ldots, r_k \ge 0 \\ r_1 + \ldots + r_k = n}} \dfrac{n!}{r_1! \cdot \ldots \cdot r_k!} a_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{r_2}$.

12.2 Задачи к занятию [*5–10*]

1 Доказать: а) $\sum\limits_{x=1}^{n} \dfrac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^{x}} = \dfrac{2}{n+1}$; б) $\sum\limits_{k=9}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$; в) $\dfrac{\left|C_{n+1}^{r+1} - C_n^r\right| C_{n-1}^{r-1}}{\left(C_n^r\right)^2 - C_{n+1}^{r+1} C_{n-1}^{r-1}} = r$;

г) $\sum\limits_{x=1}^{n}\dfrac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^{x}}=\dfrac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}$; д) при $m>n$ $\sum\limits_{x=0}^{n}\dfrac{n(n-1)...(n-x+1)}{m(m-1)...(m-x+1)}=\dfrac{m+1}{m-n+1}\sum\limits_{x=0}^{n}\dfrac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}}=$ $=\dfrac{2n+1}{n+1}$.

2 Для восьмой строки треугольника Паскаля (1 7 21 35 35 21 7 1): а) найти девятую и десятую его строки; б) проверить, что если a, b и c – три последовательных числа в восьмой строке треугольника Паскаля, то одно из чисел десятой строки можно получить как сумму $a+2b+c$; в) воспользоваться формулой Паскаля для доказательства равенства $C_n^k+2C_n^{k+1}+C_n^{k+2}=C_{n+2}^{k+2}$ при $0\le k\le n-2$.

3 Найти коэффициент при a^3b^5 после раскрытия скобок в выражении $(a+b)^8$.

4 Найти коэффициент при xy^3z^4 после раскрытия скобок в выражении $(x+y+z)^8$.

5 Найти коэффициент при xy^2z после раскрытия скобок в выражении $(x+2y+z-1)^5$.

6 Найти наибольший коэффициент в разложениях $\left(a+b+c\right)^{12}$ и $(a+b+c+d)^9$.

7 Чему равно число 11^4? Использовать результат биномиальной теоремы.

8 Найти коэффициент при xy^2z после раскрытия скобок в выражении $(x+2y+z-1)^5$.

9 Найти коэффициент при: а) x^5 в разложении $\left(1+x\right)^7$; x^{17} в разложении $\left(1+x^5\right)^7$.

10 Найти коэффициент при x^{30} в разложении выражения $\left(3-x^2+x^5\right)^{19}$ по полиномиальной формуле, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

11 Вычислить суммы, представленные в таблице 12.1.

Таблица 12.1 – Суммы для задачи 11

Номер варианта	Сумма	Номер варианта	Сумма
1	$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n$	5	$-2C_n^1+3C_n^2-4C_n^3+...+(-1)^n(n+1)C_n^n$
2	$4C_n^2+7C_n^3+10C_n^4+...+(3n-2)C_n^n$	6	$C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-...+(-1)^n nC_n^n$
3	$C_n^2+2C_n^3+3C_n^4+...+(n-1)C_n^n$	7	$3C_n^1+5C_n^2+7C_n^3+...+(2n-1)C_n^{n-1}$
4	$C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+...+(2n-1)C_n^{n-1}$	8	$2C_n^1+7C_n^2+12C_n^3+...+(5n-2)C_n^n$

12.3 Домашнее задание [*5–10*]

1 Необходимо: а) положив в биноме Ньютона $a = b = 1$, показать, что для любого $n = 0, 1, 2, ...$ справедлива формула $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$; б) показать, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0$.

2 Найти коэффициент при x^k в разложении данного выражения P, вид которого задан в таблице 12.2, по полиномиальной формуле, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Таблица 12.2 – Данные для задачи 2

Номер варианта	k	P	Номер варианта	k	P
1	23	$\left(2 + x^2 - x^3\right)^{13}$	8	30	$\left(x^7 + 3 - x^2\right)^{16}$
2	96	$\left(1 + x^6 - x^{10}\right)^{17}$	9	18	$\left(2 + x^6 - x^2\right)^9$
3	80	$\left(4 - x^8 + x^6\right)^{14}$	10	22	$\left(3 - x^2 + x^5\right)^{12}$
4	130	$\left(x^7 - 2 + x^5\right)^{26}$	11	112	$\left(4 + x^{18} + x^4\right)^{28}$
5	66	$\left(x^7 - x^3 + 3\right)^{22}$	12	46	$\left(1 - x^4 + x^6\right)^{14}$
6	48	$\left(1 + x^7 - x^2\right)^{25}$	13	48	$\left(3 + x^5 - x^3\right)^{16}$
7	114	$\left(3 + x^{14} + x^6\right)^{20}$	14	40	$\left(x^3 + 3 - x^4\right)^{13}$

13 Практическое занятие № 13. Разбиения

На занятии рассматриваются понятие разбиения, число разбиений множества на подмножества, генерация разбиения конечного множества, генерация разбиения числа.

13.1 Теоретическая часть [*1–3, 5, 6*]

Пусть X – произвольное множество. Семейство непустых множеств $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$, удовлетворяющее условиям $B_i \subset X$, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = X$, $B_i \neq \varnothing$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$, называют ***разбиением*** множества X, а подмножества B_i – *блоками* разбиения.

Например, множество $\{1,2,3\}$ можно записать в виде следующих разбиений: $\{1,2,3\}, \{1,2\}\{3\}$, $\{1,3\}\{2\}$, $\{1\}\{2,3\}$, $\{1\}\{2\}\{3\}$.

Число разбиений m-элементного множества на n блоков называют ***числом Стирлинга второго рода*** и обозначают $S(n,m)$.

По определению имеем $S(m,m)=1$, $S(m,0)=0$ при $m>0$, $S(0,0)=1$, $S(m,n)=0$ при $n>m$.

Теорема 1. $S(m,n)=S(m-1,n-1)+nS(m-1,n)$.

Теорема 2. $S(m,n)=\sum_{i=n-1}^{m-1} C_{m-1}^{i} S(i,n-1)$.

Число сюръективных функций, т. е. число размещений m предметов по n ящикам, таких, что все ящики заняты, называют ***числом Стирлинга первого рода*** и обозначают $s(n,m)$.

Теорема 3. $s(m,n)=n!\,S(m,n)$.

Число всех разбиений m-элементного множества называют числом Белла и обозначают $B(m)$, $B(m)=\sum_{n=0}^{m} S(m,n)$, $B(0)=1$.

Теорема 4. $B(m+1)=\sum_{i=0}^{m} C_{m}^{i} B(i)$.

Под ***разбиением числа*** n понимают последовательность неотрицательных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ такую, что $n=a_1+a_2+\ldots$.

Например, разбиения числа 8 в обратном лексикографическом порядке имеют вид: 8, 71, 62, 611, 53, 521, 5111, 44, 431, 422, 4211, 41111, 332, 3311, 3221, 32111, 311111, 2222, 22211, 221111, 2111111, 11111111.

13.2 Задачи к занятию [*5–10*]

1 Построить все разбиения множества $\{1,2,3,4,5\}$.

2 Дано множество $X=\{a,b,c,d\}$. Необходимо выполнить разбиение на два одноэлементных подмножества и одно двухэлементное. Подсчитать число таких разбиений.

3 Дано множество $X=\{a,b,c,d,e,f\}$. Разбить на два трехэлементных подмножества. Подсчитать число таких разбиений.

4 Множество состоит из семи элементов. Сколькими способами его можно разбить на два подмножества A_1 и A_2, если $|A_1|=3$, $|A_2|=4$?

5 Множество состоит из 12 элементов. Сколькими способами его можно разбить на два подмножества A_1 и A_2, если $|A_1|=|A_2|$?

6 Сколькими способами множество A можно разбить на два подмножества A_1 и A_2, если $|A|=9$?

7 Дано разбиение $A_1=\{1,2,3\}$, $A_2=\{4,5,6,7,8\}$. Найти число разбиений множества $A_1 \cup A_2$, если: а) $|A_1|=3$, $|A_2|=5$; б) $|A_1|=2$, $|A_2|=6$; в) $|A_1|=|A_2|=4$.

8 Известно, что булеан подмножества A_1 содержит 126 собственных подмножеств. Кроме того, известно, что $|A_1|+|A_2|=14$, где A_1 и A_2 – разбиение множества A. Определить $|A_2|$.

9 Известно, что существует 4096 способов разбиения множества A на два подмножества. Определить $|A|$.

10 Множество A разбито на подмножества так, что $|A_1|=1$, $|A_2|=1$, $|A_3|=4$, $|A_4|=4$. Сколько существует таких разбиений (ограничений нет)?

11 Лексикографически генерировать все разбиения числа $n=10$ на $k=4$ компонент.

12 Доказать, что число упорядоченных разбиений числа n на k натуральных слагаемых, т. е. число решений уравнения $n=x_1+...+x_k$, $x_i>0$, $i=1,...,k$, равно $C_{n-1}^{k-1}=\sigma(k,n)$, а общее число упорядоченных разбиений n на слагаемые равно 2^{n-1}.

13 Обозначим через $\lambda(n)$ – число неупорядоченных разбиений n на различные слагаемые и $\rho(n)$ – число неупорядоченных разбиений n на нечётные слагаемые (равные или неравные). Доказать, что $\lambda(n)=\rho(n)$.

14 Определить число способов разбиения на слагаемые числа 5 при условии, что порядок слагаемых учитывается и что каждая сумма начинается: а) с единицы (например, $1+2+2$; 2); б) с цифры 2 (например, $2+3$); в) с цифры 3; г) с цифры 4; д) с цифры 5.

15 Найти все способы разбиения числа 6 на слагаемые при условии, что порядок записи слагаемых не имеет значения. Определить: а) число разбиений, имеющих по три слагаемых; б) число разбиений, имеющих более двух слагаемых; в) число всех разбиений.

13.3 Домашнее задание [*5–10*]

1 Дано множество $A=\{a,b,c,d,e,f,k\}$. Сколькими способами можно разбить его на три подмножества A_1, A_2 и A_3, если $|A_1|=4$, $|A_2|=2$, $|A_3|=3$?

2 Дано $|A_1|=2$, $|A_2|=3$, $|A_3|=4$, $|A_4|=1$, $|A|=10$. Сколько существует способов разбиения множества A на четыре подмножества A_1, A_2, A_3, A_4 при отсутствии каких-либо ограничений?

3 Лексикографически генерировать все разбиения числа $n=12$ на $k=6$ компонент.

4 Показать, что $p^*(n)=p(n)-p(n-1)$ для $n\geq 1$ есть число разбиений n на части больше единицы. Опираясь на свойства $p^*(n)$, показать, что $p(n+2)-2p(n+1)+p(n)\geq 0$ при $n\geq 0$.

5 Доказать, что число разбиений любого положительного целого числа n на различные части равно числу разбиений n на нечётные части, показав, что

$$(1+x)\left(1+x^2\right)...\left(1+x^i\right)...=\frac{1}{(1-x)\left(1-x^3\right)...\left(1-x^{2i-1}\right)...}.$$

6 Определить число вариантов разбиения на слагаемые числа 8 при условии, что учитывается порядок слагаемых и что каждое разбиение

содержит: а) три слагаемых; б) четыре слагаемых; в) пять слагаемых; г) шесть слагаемых.

7 Определить число вариантов разбиения на слагаемые числа 5, если учитывается порядок слагаемых и в каждом разбиении содержится хотя бы одна цифра: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

8 Найти все способы разбиения числа 9 на слагаемые при условии, что порядок записи слагаемых не имеет значения. Найти число: а) разбиений, содержащих по три слагаемых; б) разбиений, содержащих по четыре слагаемых; в) разбиений, содержащих по пять слагаемых; г) всех слагаемых.

14 Практическое занятие № 14. Метод включений и исключений

На занятии рассматриваются формулы включений и исключений.

14.1 Теоретическая часть [*1–3, 5, 6*]

Формулы включений и исключений позволяют вычислить мощность объединения нескольких множеств, если известны их мощности и мощности всех возможных пересечений.

Пусть A и B – конечные множества. Тогда

$$\left|A\cup B\right|=\left|A\right|+\left|B\right|-\left|A\cap B\right|. \qquad (14.1)$$

Пусть A, B и C – конечные множества. Тогда

$$\left|A\cup B\cup C\right|=\left|A\right|+\left|B\right|+\left|C\right|-\left|A\cap B\right|-\left|A\cap C\right|-\left|B\cap C\right|+\left|A\cap B\cap C\right|. \qquad (14.2)$$

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – конечные множества. Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right|-\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right|+\sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right|+...+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i}^{n}A_i\right|. \qquad (14.3)$$

Пример – Сколько положительных чисел от 1 до 500 делятся на 3, на 5 и на 7?

Решение

Обозначим свойства делимости на 3, 5 и 7 соответственно A, B и C. Тогда для $n=500$ имеем $\left|A\right|=\left[500/3\right]=166$, $\left|B\right|=\left[500/5\right]=100$, $\left|C\right|=\left[500/7\right]=71$. Для чисел 3 и 5, 3 и 7, 5 и 7 соответственно наименьшее общее кратное 15, 21, 35. Поэтому $\left|A\cap B\right|=\left[500/15\right]=33$,

$|A \cap C| = [500/21] = 23$, $|A \cap B \cap C| = [500/35] = 14$. Для чисел 3, 5 и 7 наименьшее общее кратное 105. Тогда $|A \cap B \cap C| = [500/105] = 4$. В соответствии с (14.2) имеем $|A \cup B \cup C| = 166 + 100 + 71 - 33 - 23 - 14 + 4 = 271$.

14.2 Задачи к занятию **[*5–10*]**

1 Известно, что из 100 студентов живописью увлекаются 28, спортом – 42, музыкой – 30, живописью и спортом – 10, живописью и музыкой – 8, спортом и музыкой – 5, живописью, спортом и музыкой – 3. Определить: количество студентов, увлекающихся только спортом; ничем не увлекающихся.

2 В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Шестеро знают английский, шестеро – немецкий, семеро – французский. Четверо знают английский и немецкий, трое – немецкий и французский, двое – французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек работают в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Только французский?

3 На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром – 38 человек, с ветчиной – 42 человека, с сыром и с колбасой – 28 человек, с колбасой и с ветчиной – 31 человек, с сыром и с ветчиной – 26 человек. Все три вида бутербродов взяли 25 человек, а несколько человек вместо бутербродов захватили с собой пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

4 Сколько неотрицательных целых чисел, меньших, чем миллион, содержат все цифры 1, 2, 3, 4? Сколько чисел состоит только из этих цифр?

5 Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

6 Сколько можно сделать перестановок из n элементов, в которых данные два элемента а и b не стоят рядом? Данные три элемента a, b, c не стоят рядом (в любом порядке)? Никакие два из элементов a, b, c не стоят рядом?

7 Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр числа 1233145254 так, чтобы две одинаковые цифры не шли друг за другом?

8 Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа 12312343 так, чтобы три цифры 3 не шли друг за другом?

9 Сколькими способами можно переставить цифры числа 12341234 так, чтобы никакие две одинаковые цифры не шли друг за другом?

10 Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на α, ни на β, ни на γ, ни на δ? Значения α, β, γ и δ представлены в таблице 14.1.

Таблица 14.1 – Значения α, β, γ и δ в задаче 10

Номер варианта	α	β	γ	δ	Номер варианта	α	β	γ	δ
1	3	4	5	6	5	2	5	4	17
2	8	5	2	9	6	4	5	8	11
3	11	2	3	4	7	7	16	3	8
4	3	8	16	7	8	9	8	5	2

14.3 Домашнее задание [*5–10*]

1 Сколькими способами можно переставить цифры числа 1234114546 так, чтобы три одинаковые цифры не шли друг за другом?

2 Сколькими способами можно переставить цифры числа 1234114546 так, чтобы две одинаковые цифры не шли друг за другом?

3 Найти число способов разложения n шаров по m ящикам так, чтобы r $(0 \le r \le m)$ ящиков остались пустыми.

4 Из урны, содержащей m различных шаров, одновременно извлекают s $(1 \le s \le m)$ шаров, записывают их номера, а затем шары возвращают обратно в урну. Можно составить $\left(C_m^s\right)^d$ различных наборов, получающихся в результате d извлечений. Найти число наборов, в которых: а) встречаются все шары; б) ровно r $(0 \le r \le m)$ шаров не встречаются.

5 Вычислить $S = \sum\limits_k (1/2)^k$, где суммирование производится по всем натуральным k, не кратным 2, 3 и 5.

15 Практическое занятие № 15. Метод рекуррентных соотношений

На занятии рассматриваются понятие рекуррентного соотношения и решение линейных рекуррентных соотношений.

15.1 Теоретическая часть [*1–3*, *5*, *6*]

Рекуррентным отношением k***-го порядка*** называется формула, позволяющая выражать значение члена последовательности с номером $n\left(n > k\right)$ через члены этой последовательности с номерами $n-1, n-2, ..., n-k$.

Примерами рекуррентных соотношений являются: арифметическая и геометрическая прогрессии (формулы $a_{n+1} = a_n + d$ и $a_{n+1} = qa_n$); последовательность чисел Фибоначчи (формулы $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$).

Решением рекуррентного соотношения называют числовую последовательность, обращающую его в верное равенство при подстановке в него формулы общего члена последовательности.

Начальными условиями рекуррентного соотношения k***-го порядка*** называют первые k членов последовательности, являющейся решением данного рекуррентного соотношения.

Линейным однородным рекуррентным соотношением k***-го порядка с постоянными коэффициентами*** называют уравнение

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n. \qquad (15.1)$$

При этом последовательность $a_0, a_2, \ldots$ называется ***возвратной***.

Общим решением соотношения (15.1) называют такое его решение, которое содержит k произвольных постоянных, путем подбора которых можно удовлетворить начальным условиям.

Характеристическим уравнением соотношения (15.1) называют уравнение

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_k. \qquad (15.2)$$

Теорема. Общее решение соотношения (15.1) имеет вид:

$$a_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_p,$$

где

1) $A_i = C_i x^n$, если $x -$ действительный корень первой кратности уравнения (15.2), где $C_i -$ произвольные постоянные;

2) $A_i = x^n\left(C_{i,1} + nC_{i,2} + n^2 C_{i,3} + \ldots + n^{m-1} C_{i,m}\right)$, если $x -$ действительный корень кратности m уравнения (15.2), где $C_{i,1}$, $C_{i,2}$, $C_{i,3}, \ldots, C_{i,m} -$ произвольные постоянные;

3) $A_i = r^n\left(D_i \cos n\varphi + E_i \sin n\varphi\right)$, если $r(\cos n\varphi \pm i \sin n\varphi) -$ комплексно-сопряженная пара корней первой кратности уравнения (15.2), где $D_i, E_i -$ произвольные постоянные.

Пример – Найти общее решение рекуррентного соотношения $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$. Найти решение рекуррентного соотношения, удовлетворяющее начальным условиям: $a_0 = 0, a_1 = 1$.

Решение

Корнями характеристического уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ являются числа $x_1 = 2$ и $x_1 = 3$. Следовательно, общее решение имеет вид $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Используя начальные условия, получаем систему уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 + 3C_2 = 1, \end{cases}$ решением которой являются $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. В результате имеем $a_n = -2^n + 3^n$.

Неоднородным линейным рекуррентным уравнением называют уравнение вида

$$a_{n+k}+c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+...+c_ka_n=f(n). \qquad (15.3)$$

Теорема. Общее решение линейного неоднородного уравнения (15.3) представляется в виде суммы общего решения однородного линейного рекуррентного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения (15.3), т. е. любого решения, которое ему удовлетворяет.

Общих способов нахождения частного решения (15.3) нет, однако для специальных видов $f(n)$ существуют стандартные виды определения частных a_n соотношения (15.3). В частности, если $f(n)=\beta^n$, где β не является корнем характеристического уравнения (15.2), то частное решение (15.3) находят в виде $a_n=c\beta^n$, где неизвестная постоянная c определяется при подстановке a_n в (15.3). В случае, когда $f(n)-$ многочлен степени k от переменной n и число 0 не является характеристическим корнем, частное решение ищут в виде $a_n=\sum\limits_{i=0}^{k}d_in^i$, где неизвестные коэффициенты d_i находятся при подстановке a_n в (15.3).

15.2 Задачи к занятию [*5–10*]

1 Написать первые пять членов решения рекуррентного соотношения $a_{n+2}=2a_{n+1}-3a_n$, удовлетворяющего заданным начальным условиям: а) $\begin{cases}a_0=0,\\ a_1=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}a_0=-1,\\ a_1=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}a_0=3,\\ a_1=0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}a_0=2,\\ a_1=1;\end{cases}$ д) $\begin{cases}a_0=2,\\ a_1=8.\end{cases}$

2 Проверить, являются ли данные функции решениями данных рекуррентных соотношений: а) $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$; $\varphi_1(n)=5\cdot 2^n$, $\varphi_2(n)=2n+1$, $\varphi_3(n)=3$; б) $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$; $\varphi_1(n)=2n$, $\varphi_2(n)=5\cdot 3^n-1$, $\varphi_3(n)=7$.

3 Найти общее решение рекуррентных соотношений: а) $a_{n+2}-7a_{n+1}+a_n=0$; б) $a_{n+2}+3a_{n+1}-10a_n=0$; в) $a_{n+2}-4a_{n+1}+13a_n=0$; г) $a_{n+2}+9a_n=0$; д) $a_{n+2}+4a_{n+1}+$ $+4a_n=0$; е) $a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0$; ж) $a_{n+3}+3a_{n+2}+3a_{n+1}+a_n=0$; з) $a_{n+4}+4a_n=0$.

4 Найти a_n, зная рекуррентное соотношение и начальные члены: а) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$, $a_0=2, a_1=4$; б) $a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=0$, $a_0=-1/4, a_1=-1/2$; в) $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$, $a_0=2, a_1=4$; г) $a_{n+2}=4a_{n+1}+5a_n$, $a_0=1, a_1=5$; д) $a_{n+2}=$ $=6a_{n+1}-9a_n$, $a_0=0, a_1=3$; е) $a_{n+2}=-a_{n+1}+2a_n$, $a_0=1, a_1=2$; ж) $a_{n+2}=8a_{n+1}$, $a_0=4$.

5 Найти решение уравнения: а) $a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=2^n$, $a_0=1$; б) $a_{n+1}+4a_n=$ $=n^2+2n, a_0=1$.

6 Найти такую последовательность, что $a_1=\cos\alpha$, $a_2=\cos 2\alpha$ и $a_{n+2}-2a_{n+1}\cos\alpha+a_n=0$.

15.3 Домашнее задание [*5–10*]

1 Найти решение уравнения: а) $a_{n+2}+3a_{n+1}+2a_n=0$, $a_0=2,\ a_1=6$; б) $a_{n+2}-6a_{n+1}+8a_n=0$, $a_0=1,\ a_1=2$; в) $a_{n+2}+4a_{n+1}+3a_n=0$, $a_0=2,\ a_1=4$; г) $a_{n+2}+4a_{n+1}+4a_n=0$, $a_0=2,\ a_1=1$; д) $a_{n+2}+6a_{n+1}+9a_n=0$, $a_0=3,\ a_1=1$.

2 Найти решение уравнения: а) $a_{n+1}+6a_n=n^2-1,\ a_0=2$; б) $a_{n+1}-2a_n=n^2+1,$ $a_0=1$; в) $a_{n+2}+4a_{n+1}+3a_n=n,\ a_0=1,\ a_1=2$; г) $a_{n+2}+4a_{n+1}+3a_n=3^n$, $a_0=3,\ a_1=0$; д) $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=4^n$, $a_0=4,\ a_1=0$.

16 Практические занятия № 16 и 17. Производящие функции

На занятии рассматривается понятие производящей функции и ее нахождение.

16.1 Теоретическая часть [*1–3, 5, 6*]

Пусть имеется числовая последовательность $\{a_n\}$.

Функцию вида

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \qquad (16.1)$$

называют ***производящей*** для последовательности $\{a_n\}$.

Функцию вида

$$F(z)=a_0+a_1\frac{z}{1!}+a_2\frac{z^2}{2!}+\ldots+a_n\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{z^n}{n!} \qquad (16.2)$$

называют ***экспоненциально производящей*** для последовательности $\{a_n\}$.

Пример **–** Построить производящую функцию для чисел Фибоначчи.

Решение

Имеем рекуррентное соотношение: формулы $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ и $a_0=a_1=1$. Умножим левую и правую части этого рекуррентного соотношения на z^n, где $n=0,1,2,3,\ldots$. Получим систему уравнений. Сложив их левые и правые части, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Видим, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$ – это искомая производящая функция, а суммы $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n = \frac{f(z)-a_0}{z} = \frac{f(z)-1}{z}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^n = \frac{f(z)-a_0-a_1 z}{z^2} = \frac{f(z)-1-z}{z^2}$. Это позволяет записать $\frac{f(z)-1-z}{z^2} = \frac{f(z)-1}{z} + f(z)$. Откуда получаем для производящей функции следующее выражение: $f(z) = 1/(1-z-z^2)$.

16.2 Задачи к занятию [*5–10*]

1 Найти производящую функцию для последовательности $\{a_n\}$, если: а) $a_n = (-1)^n$ при $n \ge 0$; б) $a_n = 1$ при $0 \le n \le N$, $a_n = 0$ при $n > N$; в) $a_n = n+1$ при $0 \le n \le N$, $a_n = 0$ при $n > N$; г) $a_n = (n+1)(n+2)$ при $0 \le n \le N-1$, $a_n = 0$ при $n \ge N$; д) $a_n = \alpha n$ при $n \ge 0$; е) $a_n = n^2$ при $n \ge 0$; ж) $a_n = n\alpha^n$ при $n \ge 0$.

2 Найти экспоненциальную производящую функцию для последовательности $\{a_n\}$, если: а) $a_n = 1$; б) $a_n = \alpha^n$; в) $a_n = n$; г) $a_n = n(n-1)$; д) $a_n = n^2$.

3 Найти общий член a_n последовательности, для которой функция $f(z)$ является производящей: а) $f(z) = (q+pz)^n$; б) $f(z) = (1-z)^{-1}$; в) $f(z) = \sqrt{1-z}$.

4 Рациональны ли производящие функции для последовательностей: а) $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$; б) $2, -6, 12, \ldots, (-1)^k (k+1)(k+2), \ldots$; в) $1, -4, 9, -16, \ldots, (-1)^k (k+1)^2, \ldots$; г) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{k^2}, \ldots$; д) f_n^2, где f_n – числа Фибоначчи. Найти соответствующие производящие функции в тех случаях, когда они рациональны.

5 Пользуясь производящей функцией для чисел Фибоначчи, доказать для них тождества: а) $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$; б) $a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n} = a_{2n+1}$; в) $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} = a_{2n} - 1$; г) $a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$.

6 Доказать, что любое натуральное число можно представить как сумму попарно различных чисел Фибоначчи.

7 Найти производящую функцию последовательности $\{\beta_n\}$ через производящую функцию последовательности $\{\alpha_n\}$, если: а) $\beta_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \alpha_{n-1}, & n = 1, 2, \ldots; \end{cases}$ б) $\beta_n = \alpha_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; в) $\beta_n = \alpha_{n+k}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $k \in N$, $k > 0$; г) $\beta_n = a^n \alpha_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; д) $\beta_n = n\alpha_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; е) $\beta_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

ж) $\beta_n = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, ..., k-1 \\ \alpha_{n-k}, & n \geq k; \end{cases}$ з) $\beta_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$, $n = 0, 1, 2, ...$; и) $\beta_n = \sum_{r=0}^{n} \alpha_r \gamma_{n-r}$, $n = 0, 1, 2, ...$.

16.3 Домашнее задание [*5–10*]

1 Найти производящую функцию для последовательности $\{a_n\}$, если: а) $a_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$ при $n \geq 1$; б) $a_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$ при n – нечётном, $a_n = 0$ при n – чётном; в) $a_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$ при n – чётном, $a_n = 0$ при n – нечётном; г) $a_{n+2} + 3a_n = 0$, $a_0 = a_1 = 1$; д) $a_{n+2} + 2a_n = 0$, $a_0 = 0, a_1 = 1$.

2 Пусть $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$ – производящая функция для последовательности a_0, a_1, a_2, … . Найти производящие функции для последовательностей: а) $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, ...$; б) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, ...$; в) $a_0, a_1 b, a_2 b^2, a_3 b^3, ...$; г) $a_0, a_2, a_4, a_6, a_8, ...$.

3 Найти экспоненциальную производящую функцию для последовательности $\{a_n\}$, если: а) $a_n = n + 3$; б) $a_n = n!$; в) $a_n = -(n+1)/n!$; г) $\alpha_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1/n^2, & n > 0. \end{cases}$

4 Доказать следующие утверждения: а) $1 - \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} - \dfrac{1}{3\cdot 4} + ... + (-1)^n \dfrac{1}{a_{n-1}\cdot a_n} = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$; б) $a_{n+m} = a_{n-1}a_m + a_n a_{m+1}$; в) $a_{2n} = (a_{n+1})^2 - (a_{n-1})^2$; г) $a_{2n+1} = (a_{n+1})^2 + (a_n)^2$; д) $a_{3n} = (a_{n+1})^3 + (a_n)^3 - (a_{n-1})^3$.

5 Показать, что функция $(1-4z)^{-1/2}$ является производящей для последовательности $a_n = C_{2n}^n$.

6 Доказать тождество $\sum_{k=0}^{n} C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k} = 4^n$.

Список литературы

1 **Новиков, Ф. А.** Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. – Санкт-Петербург : Питер, 2000. – 304 с.

2 **Мальцев, Ю. Н**. Введение в дискретную математику (элементы комбинаторики, теории графов и теории кодирования): учебное пособие / Ю. Н. Мальцев, Е. П. Петров. – Барнаул: Алт. ун-т, 1997. – 135 с.

3 **Белоусов, А. И.** Дискретная математика: учебник для вузов / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 5-е изд. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – 743 с.

4 **Москинова, Г. И.** Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: учебное пособие / Г. И. Москинова. – Москва: Логос, 2003. – 240 с.

5 **Шевелев, Ю. П.** Дискретная математика: учебное пособие / Ю. П. Шевелев. – Санкт-Петербург : Лань, 2016. – 592 с.

6 **Шапорев, С. Д.** Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий / С. Д. Шапорев. – Санкт-Петербург : БХБ-Петербург, 2006. – 400 с.

7 **Тишин, В. В.** Дискретная математика в примерах и задачах / В. В. Тишин. – Санкт-Петербург : БХВ- Петербург, 2008. – 352 с.

8 **Эвин, А. Ю.** Задачник по дискретной математике / А. Ю. Эвин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Челябинск: ЮУрГУ, 2002. – 164 с.

9 **Булгакова, И. Н.** Дискретная математика. Элементы теории, задачи и упражнения: учебное пособие для вузов: в 2 ч. / И. Н. Булгакова. – 2-е изд. – Воронеж: ВГУ, 2008. – Ч. 1. – 64 с.

10 **Алексеев, В. Е.** Сборник задач по дискретной математике: электронное учебно-методическое пособие / В. Е. Алексеев , Л. Г. Кисилева, Т. Г. Смирнова. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 80 с.

11 **Кофман, А.** Введение в теорию нечетких множеств: пер. с франц. / А. Кофман. – Москва: Радио и связь, 1982. – 32 с.

12 **Конышева, Л. К.** Элементы теории нечетких множеств: учебное пособие / Л. К. Конышева, Т. А. Серова. – Екатеринбург: Рос. гос. проф.-пед. ун-т, 2007. – 129 с.

13 **Рыжов, А. П.** Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости / А. П. Рыжов. – Москва: Диалог-МГУ, 1998. – 81 с.