ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к практическим занятиям для студентов всех специальностей

Математическая статистика

Могилев 2006

УДК 519.22
ББК 22.172
М 34

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «30» ноября 2005 г., протокол № 3

Составители: ст. преподаватель Л. А. Новик;
Е.Г. Галуза

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. В. Лесковец

Методические разработки практических занятий по разделу «Математическая статистика» дисциплины «Высшая математика» подготовлены для студентов всех специальностей дневной формы обучения.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнев
Технический редактор	Л. А. Наумович
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать 11.09.2006. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1.63. Уч.-изд. л. 1.6. Тираж 165 экз. Заказ № 461.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ №02330/375 от 29.06.2004 г.
212005, г. Могилев, пр. Мира, 43

1 Математическая статистика

1.1 Постановка задачи

Дан статистический материал: случайная величина X – диаметр головки заклёпки. Измерения n = 90 головок дали следующие результаты (в миллиметрах):

13,39	13,42	13,38	13,48	13,51	13,33	13,44	13,49	13,46
13,40	13,50	13,43	13,37	13,42	13,45	13,50	13,52	13,51
13,42	13,51	13,39	13,40	13,32	13,38	13,41	13,46	13,39
13,45	13,43	13,37	13,49	13,57	13,38	13,41	13,35	13,47
13,38	13,42	13,39	13,41	13,58	13,54	13,39	13,39	13,38
13,43	13,39	13,45	13,41	13,57	13,55	13,40	13,41	13,32
13,40	13,42	13,47	13,62	13,59	13,43	13,48	13,38	13,34
13,39	13,51	13,48	13,33	13,36	13,40	13,52	13,40	13,60
13,37	13,42	13,34	13,37	13,43	13,46	13,36	13,32	13,56
13,49	13,34	13,43	13,42	13,47	13,54	13,39	13,41	13,48

Используя статистический материал (результаты измерений), необходимо:

1) определить размах варьирования R;
2) составить статистический ряд распределения частот *СВ X*;
3) составить интервальные статистические ряды частот и относительных частот;
4) построить полигон и гистограмму относительных частот;
5) найти эмпирическую функцию распределения и построить её график;
6) вычислить выборочные значения числовых характеристик *СВ X*: математического ожидания $M(X)$, дисперсии $Д(X)$, среднего квадратического отклонения $\sigma(X)$;
7) по виду полигона и гистограммы относительных частот сделать выбор закона распределения *СВ X*;
8) найти точечные оценки параметров предполагаемого распределения, записать функцию распределения и плотность вероятности *СВ X*;
9) проверить согласие эмпирической функции распределения $F^*(x)$ с теоретической F(x) при помощи критерия согласия χ^2—Пирсона или λ—Колмогорова.

В случае нормального распределения *СВ X* по заданному уровню значимости α:

1) найти интервальные оценки параметров распределения;
2) проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = a = a_0$ о математическом ожидании при альтернативной гипотезе $H_a : a \neq a_0$ $(a > a_0;\ a < a_0)$;

3) проверить нулевую гипотезу $H_0 : Д(X) = \sigma^2 = \sigma_0^2$ о дисперсии против альтернативной гипотезы $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ($\sigma^2 < \sigma_0^2$, $\sigma^2 > \sigma_0^2$).

2 Варианты заданий

2.1 При обработке наружного диаметра 100 карданных валов получены следующие размеры (в миллиметрах):

42,2	42,0	43,3	43,7	42,5	42,9	43,0	42,7	42,4	42,6
41,7	41,9	41,8	43,2	42,4	42,5	42,5	42,5	43,0	42,5
41,2	41,6	42,6	40,3	41,6	43,4	43,5	42,7	43,1	42,6
42,5	40,6	44,1	42,0	40,4	42,0	43,1	42,5	43,4	42,5
43,2	42,8	40,7	43,6	42,5	41,1	41,3	43,6	43,8	42,8
42,5	43,3	42,9	40,8	41,1	42,3	40,2	43,1	43,7	42,6
42,8	43,6	42,5	41,5	40,0	41,4	42,1	44,0	42,4	43,9
42,4	42,5	42,4	42,9	42,2	43,5	43,0	42,8	43,2	43,4
42,5	42,6	42,6	42,4	43,5	43,8	43,4	42,5	42,8	41,3
42,1	42,5	42,4	43,4	44,0	42,6	42,5	44,0	41,7	43,2

2.2 Химический анализ 110 проб угля для определения воды дал следующие результаты (в процентах):

14	13	17	18	22	15	21	22	14	15	17
15	18	14	14	19	16	23	13	12	16	19
15	19	14	13	18	18	15	16	14	22	9
12	14	11	18	16	15	20	15	16	24	16
22	15	13	18	21	13	12	16	20	18	15
21	15	13	22	18	16	15	10	19	18	16
14	15	16	11	16	13	10	11	9	20	14
19	21	20	17	15	17	13	23	15	17	17
24	16	15	13	27	21	19	14	9	18	16
18	20	10	17	12	23	16	24	17	24	21

2.3 120 измерений диаметра цапф дали следующие отклонения от номинального размера (в миллиметрах):

48	44	39	43	41	46	45	43	44	42	30	48
49	39	37	45	40	36	42	48	33	51	42	38
41	34	42	42	40	48	50	39	47	43	34	40
48	30	42	41	32	30	39	51	50	31	32	39
38	36	44	41	37	33	37	37	25	42	40	43
33	35	49	43	34	40	35	46	35	38	43	44
34	36	43	45	42	41	40	34	44	37	42	43
52	45	39	35	39	43	46	37	40	36	45	51
32	36	41	31	32	43	34	41	44	34	40	34
33	49	43	34	49	47	36	30	48	45	32	46

2.4 Из продукции токарного станка, изготавливающего валики, отобрано для анализа распределения диаметров 150 валиков. Получены следующие данные (в сантиметрах):

3,9	4,0	3,7	4,0	3,9	4,0	3,7	4,0	4,0	4,3	3,9	3,9	3,8	3,8	4,0
4,8	4,4	4,1	4,2	3,4	4,4	4,2	4,1	4,2	4,1	3,8	4,6	4,1	4,2	3,9
4,0	3,8	4,0	3,8	4,0	3,9	4,0	4,0	3,9	4,3	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0
4,6	4,2	4,1	4,4	3,9	4,2	4,1	3,7	4,1	4,2	3,6	3,7	3,7	4,4	4,4
3,8	4,0	3,9	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,3	4,0	4,0	3,8	3,8	4,0
4,4	3,6	4,6	3,7	4,1	4,4	3,9	4,1	3,4	3,9	4,0	4,0	4,0	4,0	4,3
4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	3,9	4,2	4,2	4,4	4,1	4,1
4,2	4,1	4,2	4,4	4,2	3,4	4,2	3,9	4,1	3,6	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
3,8	3,8	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,3	4,1	4,1	4,1	4,2	4,2
4,0	4,8	4,1	4,6	4,4	3,9	4,1	3,6	3,9	4,2	3,8	4,0	4,0	4,0	4,3

2.5 При сверлении 100 отверстий одним и тем же сверлом и последующим измерением диаметров получены следующие данные (в миллиметрах):

40,26	40,44	40,39	40,42	40,30	40,37	40,44	40,30	40,34	40,35
40,31	40,34	40,33	40,35	40,33	40,33	40,40	40,28	40,31	40,41
40,29	40,31	40,36	40,30	40,37	40,41	40,37	40,34	40,36	40,39
40,43	40,41	40,35	40,34	40,31	40,34	40,35	40,28	40,31	40,36
40,32	40,43	40,36	40,38	40,29	40,39	40,30	40,36	40,38	40,37
40,34	40,27	40,37	40,36	40,32	40,35	40,39	40,40	40,41	40,38
40,35	40,35	40,34	40,35	40,39	40,41	40,33	40,28	40,34	40,38
40,33	40,31	40,30	40,36	40,32	40,32	40,40	40,33	40,37	40,37
40,34	40,33	40,34	40,37	40,40	40,30	40,34	40,33	40,35	40,41
40,34	40,41	40,36	40,34	40,36	40,44	40,34	40,31	40,38	40,36

2.6 Случайная величина X — время работы элемента (в часах) для n = 100 элементов приняла следующие значения:

2,4	7,3	8,5	27,4	26,1	18,1	19,4	17,3	18,6	19,1
24,3	24,0	9,6	13,2	17,1	16,8	2,9	11,3	2,8	3,1
14,5	5,2	5,7	6,9	4,7	8,1	5,3	10,2	11,4	17,1
2,3	21,3	12,4	16,1	3,1	4,7	5,8	6,2	11,7	10,3
2,7	2,9	4,2	5,6	11,0	17,2	3,8	4,1	3,1	7,3
8,1	13,1	12,7	21,0	3,0	4,2	10,0	9,2	2,5	4,7
4,3	5,9	11,7	10,2	2,9	2,8	6,1	3,2	4,8	12,0
13,2	2,7	19,1	17,3	2,4	4,3	13,2	11,2	7,3	3,2
2,6	6,3	7,1	7,6	8	8,9	12,4	19,2	5,2	5,9
4,1	7,8	12,0	3,3	2,3	7,7	18,1	20,2	2,8	6,1

2.7 Даны результаты испытания на разрыв 100 образцов дюралюминия (в килограммах на квадратный миллиметр):

42	45	46	40	44	45	43	44	45	42
44	45	43	45	43	44	42	43	44	45
46	44	45	42	44	42	43	44	45	44
44	46	45	45	44	44	43	44	45	42
43	43	43	44	43	45	46	45	44	45
45	45	44	46	42	44	45	44	45	43
43	44	44	47	45	44	44	45	45	44
45	45	43	44	47	45	44	46	44	42
44	44	44	43	46	44	45	43	45	44
45	47	44	47	44	45	44	43	47	42

2.8 Даны 100 результатов измерений температуры в двигателе БелАЗ (в градусах) при средних скоростях:

47	49	52	51	46	48	46	45	48	49
55	51	45	53	54	53	46	52	50	52
57	53	48	53	53	56	50	53	53	56
54	48	45	50	54	48	49	50	49	54
47	48	54	57	53	57	44	52	54	52
52	57	55	52	51	51	49	54	52	54
56	54	47	53	47	49	54	44	54	51
45	47	50	54	52	54	55	54	54	50
53	49	47	48	51	50	43	52	46	51
51	51	58	49	53	50	56	48	54	51

2.9 Даны результаты определения фосфора (в процентах) в 100 чугунных образцах:

0,10	0,29	0,45	0,35	0,58	0,39	0,50	0,31	0,40	0,35
0,15	0,40	0,44	0,34	0,42	0,35	0,55	0,35	0,37	0,36
0,17	0,40	0,43	0,33	0,41	0,57	0,40	0,31	0,33	0,35
0,18	0,26	0,46	0,32	0,37	0,43	0,39	0,63	0,34	0,59
0,19	0,29	0,38	0,31	0,34	0,47	0,38	0,35	0,36	0,35
0,20	0,30	0,25	0,30	0,36	0,40	0,37	0,34	0,52	0,36
0,12	0,29	0,27	0,24	0,35	0,48	0,36	0,51	0,48	0,38
0,20	0,21	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,29
0,22	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,50
0,23	0,35	0,37	0,35	0,34	0,35	0,32	0,36	0,37	0,41

2.10 Измерения 120 интервалов поступления агломерата под выгрузку дали следующие результаты (в часах):

1,8	2,0	5,7	3,0	1,3	1,4	2,2	2,2	2,5	1,8	6,7	2,6
0,9	5,5	1,9	1,3	1,5	1,8	2,9	2,7	3,2	2,0	3,0	3,5
7,6	3,6	2,1	2,4	7,0	2,2	3,0	1,8	1,8	3,0	2,1	2,1
2,0	2,3	2,8	1,8	2,8	3,2	3,3	2,3	1,6	3,0	1,3	6,0
2,6	2,8	7,8	3,6	1,8	2,8	1,8	1,8	2,2	1,5	2,3	2,9
1,6	1,7	1,7	2,8	3,3	1,7	2,5	1,5	1,6	2,5	2,3	5,4
2,8	2,6	2,2	2,0	1,8	2,8	5,1	2,6	2,3	2,7	1,7	2,6
2,3	1,1	3,2	2,5	1,8	3,9	3,5	3,5	3,5	1,5	3,9	2,5
4,8	1,5	2,9	2,8	1,9	2,0	2,2	2,8	1,5	2,2	2,8	2,8
5,3	1,0	2,1	1,8	1,3	2,8	1,5	1,5	1,7	1,9	1,8	1,8

2.11 Даны сведения о расходе воды, используемой заводом для технических нужд в течение 100 дней (в кубических метрах):

8	10	11	17	15	12	15	14	16	18
15	18	13	14	16	17	8	11	14	10
16	14	18	11	11	15	15	10	12	14
17	12	14	14	9	12	9	13	14	10
12	10	11	13	11	13	14	14	12	13
12	14	14	12	16	15	13	13	13	15
13	10	12	11	11	14	15	15	19	11
11	13	11	12	14	15	13	11	17	18
12	12	12	9	10	13	9	16	14	13
16	13	15	12	12	17	13	15	16	14

2.12 Подсчитаны затраты времени 120 рабочих на обработку одной детали (в минутах):

5,3	6,0	5,7	3,0	1,3	1,4	2,2	2,2	2,5	1,8	6,7	2,6
5,2	7,1	1,9	1,3	1,5	1,8	2,9	2,7	3,2	2,0	3,0	3,5
4,6	6,2	2,1	2,4	7,0	2,2	3,0	1,8	1,8	3,0	2,1	2,1
5,2	5,7	2,8	1,8	2,8	3,2	3,3	2,3	1,6	3,0	1,3	6,0
8,2	6,3	7,8	3,6	1,8	2,8	1,8	1,8	2,2	1,5	2,3	2,9
5,8	1,7	1,7	2,8	3,3	1,7	2,5	1,5	1,6	2,5	2,3	5,4
7,0	2,6	2,2	2,0	1,8	2,8	5,1	2,6	2,3	2,7	1,7	2,6
5,8	1,1	3,2	2,5	1,8	3,9	3,5	3,5	3,5	1,5	3,9	2,5
7,4	1,5	2,9	2,8	1,9	2,0	2,2	2,8	1,5	2,2	2,8	2,8
5,4	1,0	2,1	1,8	1,3	2,8	1,5	1,5	1,7	1,9	1,8	1,8

2.13 Даны значения пористости (в процентах) напыленного покрытия шейки распределительного вала автомобиля ГАЗ-63:

12	13	11	15	13	12	14	15	17	15
14	12	14	18	11	14	15	16	17	15
15	13	19	15	13	12	17	15	14	16
14	16	14	16	17	15	14	16	19	16
17	13	13	15	11	13	16	15	14	15
14	16	18	17	16	15	14	15	20	17
16	18	16	15	16	18	16	18	16	18
14	17	10	17	14	14	18	20	12	16
19	14	15	15	17	15	16	16	15	15
13	15	14	17	12	15	15	16	12	17

2.14 Измерения прочности на отрыв 100 сварных образцов, выполненных контактной сваркой, дали следующие результаты (в тоннах):

1,98	4,88	2,90	3,80	3,28	6,00	4,73	4,30	3,48	2,06
6,05	5,18	6,05	3,32	4,96	3,22	4,35	4,19	5,32	3,71
5,31	3,88	4,96	3,12	5,21	5,14	2,40	5,08	4,50	6,05
4,06	3,60	3,61	5,53	5,14	4,70	5,50	3,95	3,03	4,28
3,41	4,34	2,90	2,06	2,32	5,31	4,96	2,55	2,75	3,80
3,48	4,50	3,66	3,73	4,20	4,00	6,00	3,55	4,28	3,08
4,66	6,08	3,90	2,66	1,98	2,16	2,66	2,74	2,75	4,20
3,04	3,35	3,50	3,62	3,66	4,38	4,50	4,67	4,72	1,90
5,62	5,24	5,41	3,10	4,06	4,22	2,55	4,88	2,99	3,72
2,20	3,38	3,19	6,05	6,20	5,61	4,38	2,85	6,00	4,76

2.15 Даны статистические данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей ЗИЛ-130 (в сотнях километров):

1,6	1,7	1,8	2,2	2,5	2,1	2,3	2,2	2,5	2,2
1,8	1,5	2,1	2,3	2,6	2,6	2,4	2,1	2,4	2,2
2,1	1,9	1,4	1,9	2,1	2,6	2,3	3,2	2,2	2,3
2,3	2,1	1,7	1,3	1,2	2,5	2,2	2,8	2,3	2,1
2,7	2,2	1,9	1,6	1,9	1,8	2,0	2,5	2,9	3,1
2,2	2,4	2,1	2,2	2,4	1,5	1,6	1,8	2,7	3,0
2,3	2,2	2,7	2,3	2,1	2,2	1,4	1,7	2,5	2,7
2,4	2,0	2,1	2,4	2,1	2,4	2,4	1,9	1,5	2,2
2,1	2,2	2,3	2,2	2,2	2,3	2,1	2,0	1,6	1,9
2,2	2,3	1,9	1,9	2,3	2,2	2,4	2,3	1,9	1,6

Таблица 1 — Дополнительные сведения к вариантам заданий

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7
Объем выборки	50	45	40	35	55	50	45
Уровень значимости	0,2	0,1	0,05	0,01	0,02	0,1	0,05
Критерий согласия	χ^2	χ^2	λ	λ	χ^2	χ^2	λ
a_0	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_2	a_1
σ_0^2	σ_2^2	σ_1^2	σ_1^2	σ_2^2	σ_1^2	σ_2^2	σ_1^2
Гипотезы H_a	$a \neq a_0$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$	$a > a_0$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$a < a_0$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$a \neq a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a > a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a < a_0$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$	$a \neq a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$

Продолжение таблицы 1

Номер варианта	8	9	10	11	12	13	14	15
Объем выборки	35	40	55	60	45	40	35	50
Уровень значимости	0,02	0,01	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,2
Критерий согласия	λ	χ^2	χ^2	χ^2	λ	λ	λ	χ^2
a_0	a_1	a_2	a_2	a_1	a_1	a_2	a_1	a_2
σ_0^2	σ_2^2	σ_1^2	σ_1^2	σ_2^2	σ_1^2	σ_2^2	σ_2^2	σ_1^2
Гипотезы H_a	$a > a_0$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$a < a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a \neq a_0$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$	$a > a_0$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$a < a_0$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$	$a \neq a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a > a_0$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$a < a_0$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$

Замечание 1. a_1 *и* σ_1 *соответственно значения* a *и* σ *в правом конце доверительных интервалов;* a_2 *и* σ_2 *— в левом конце*

3 Образец решения задачи

3.1 Замечание 2. Надо изучить в совокупности однородных объектов некоторый качественный или количественный признак, характеризующий эти объекты. Иногда проводят сплошное обследование, т.е. обследуют каждый из объектов совокупности, выясняя признак, который интересует. Но сплошное обследование применяют редко. Обычно отбирают из всей совокупности некоторое число объектов и изучают их.

Выборочной совокупностью, или выборкой, называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производят выборку.

Объёмом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов в этой совокупности.

Из генеральной совокупности извлечена выборка и для изучения некоторого признака (случайной величины X) проводят независимые опыты или наблюдения. Результаты их записывают обычно в том порядке, в котором они поступают (значения СВ X — $x_i,\ i=\overline{1,n}$*). Это исходные данные, тот статистический материал, который подлежит дальнейшей обработке и анализу.*

Разработкой методов сбора, описания и анализа экспериментальных данных (статистического материала), получаемых в результате наблюдений массовых случайных событий, и занимается математическая статистика.

$x_{\min}=13{,}32;$ $x_{\max}=13{,}62;$ $R=x_{\max}-x_{\min}=13{,}62-13{,}32=0{,}3$ — размах варьирования (разность между крайними значениями вариант вариационного ряда), т.е. возможные значения СВ X (диаметр головки заклепки) принадлежат отрезку $[13{,}32;\,13{,}62]$.

3.2 Составим статистический ряд распределения частот (таблицу 2). *Замечание 3. Для оценки закона распределения СВ X или её числовых характеристик производят измерения объектов выборки, получают значения признака* $x_1,\ x_2,\dots,x_n$*, причем* x_1 *наблюдали* m_1 *раз,* x_2 *наблюдали* $m_2,\dots,$ x_k — m_k *раз,* $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ — *объём выборки. Наблюдаемые значения* $x_i\ (i=\overline{1,k})$ — *варианты, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, — вариационный ряд. Числа наблюдений* $m_i\ (i=\overline{1,k})$ — *частоты, а их отношения к объёму выборки* $\dfrac{m_i}{n}=\varpi_i$ — *относительные частоты. Записав вариационный ряд и указав соответствующие значения частот (или относительных частот), получим статистический ряд распределения СВ X.*

Таблица 2 — Вариационный ряд (столбец 1). Статистический ряд распределения частот (столбцы 1 и 3)

Диаметр головки x_i, мм	Штриховые отметки	Частота m_i	Диаметр головки x_i, мм	Штриховые отметки	Частота m_i
1	2	3	4	5	6
13,32	/	1	13,48	////	4
13,33	//	2	13,49	///	3
13,34	///	3	13,50	//	2
13,35	/	1	13,51	////	4
13,36	///	3	13,52	//	2
13,37	/////	5	13,53		0
13,38	/////	5	13,54	//	2

Окончание таблицы 2

1	2	3	4	5	6
13,39	///// ///// /	11	13,55	/	1
13,40	///// /	6	13,56	/	1
13,41	///// /	6	13,57	/	1
13,42	///// //	7	13,58	/	1
13,43	/////	5	13,59	/	1
13,44	/	1	13,60	/	1
13,45	///	3	13,61		0
13,46	////	4	13,62	/	1
13,47	//	2			

Контроль: $\sum_i n_i = 90$.

Для удобства подсчёта частот вариант ставим черточки, соответствующие единице счета.

3.3 Замечание 4. Изучение непрерывных случайных величин начинают с группировки статистического материала, т.е. с разбиения $[x_{\min};\ x_{\max}]$ *на* k *частичных интервалов равной длины и подсчёта частот попадания наблюдаемых значений СВ X в частичные интервалы. Число интервалов выбирают произвольно* $(5 \le k \le 15)$ *или рассчитывают по формуле*

$$h = \frac{R}{1 + 3{,}2\lg n}, \tag{1}$$

где $n = 90$ — *объём выборки;*

h — *длина интервала.*

Число интервалов равно округленному до целого $\frac{R}{h}$.

$$h = \frac{0{,}3}{1 + 3{,}2\lg 90} \approx \frac{0{,}3}{7{,}24}, \quad k = \frac{R}{h} = 1 + 3{,}2 \cdot \lg 90 \approx 7{,}24 \quad (k \in N).$$

Выберем число интервалов $k = 6$, тогда $h = \frac{0{,}3}{6} = 0{,}05$.

Составим интервальные статистические ряды распределения частот и относительных частот (таблица 3, стб. 2;4 и 2;5).

В столбцах 6-10 подсчитаны числа, нужные при выполнении следующих пунктов задачи.

3.4 Для наглядности статистические ряды представляют графиками и диаграммами. Наиболее распространенными графиками являются *полигон* и *гистограмма*. Полигон применяют для изображения как дискретных, так и интервальных статистических рядов, гистограмму применяют для изображения только интервальных рядов.

Таблица 3 — Интервальные статистические ряды (столбцы 2;4 и 2;5)

Номер интер-вала	Интервал $[x_i; x_{i+1})$	Подсчет частот	Частота в интервале n_i	Относительная частота $w_i = \frac{n_i}{n}$	Накопленная частота n_x	Относительная накопленная частота $\frac{n_x}{n}$	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	Плотность относительной частоты $\frac{w_i}{h}$	Середина интервала $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$
1	$[13{,}32;\ 13{,}37)$	1+2+3+1+3	10	$1/9$	10	$1/9$	200	$20/9$	13,345
2	$[13{,}37;\ 13{,}42)$	5+5+11+6+6	33	$11/30$	43	$43/90$	660	$22/3$	13,395
3	$[13{,}42;\ 13{,}47)$	7+5+1+3+4	20	$2/9$	63	$7/10$	400	$40/9$	13,445
4	$[13{,}47;\ 13{,}52)$	2+4+3+2+4	15	$1/6$	78	$39/45$	300	$10/3$	13,495
5	$[13{,}52;\ 13{,}57)$	2+2+0+1+1	6	$1/15$	84	$42/45$	120	$4/3$	13,545
6	$[13{,}57;\ 13{,}62]$	2+1+1+1+0+1	6	$1/15$	90	1	120	$4/3$	13,595

Контроль: $\sum_{i=1}^{6} n_i = 90$, $\sum_{i=1}^{6} w_i = 1$.

Строим полигон относительных частот (рисунок 1) по данным столбцов 5 и 10 (см. таблицу 3).

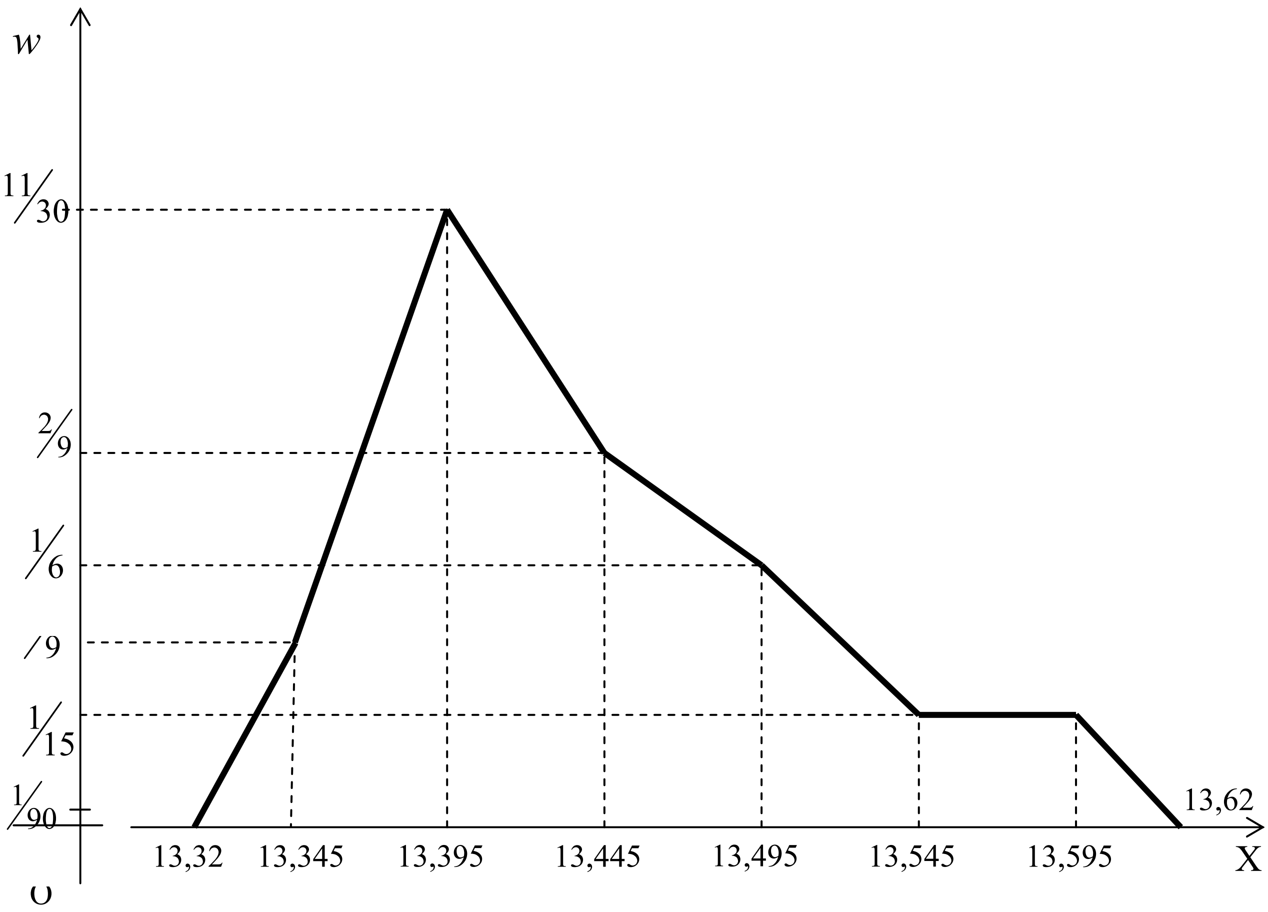

Рисунок 1

Замечание 5. Полигон относительных частот (частот)—ломаная, звенья которой соединяют точки $(y_i; w_i)$ $((y_i; n_i))$.

По данным столбцов 2 и 9 таблицы 3 строим гистограмму относительных частот (рисунок 2).

Гистограмма относительных частот (частот) — ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы $(x_i; x_{i+1})$, *а высоты равны отношению* $\frac{w_i}{h}$ — *плотности относительной частоты* $\left(\frac{n_i}{h} - \text{плотности частоты}\right)$.

Площадь гистограммы относительных частот равна $\sum_{i=1}^{6} h \cdot \frac{w_i}{h} = \sum_{i=1}^{6} w_i = 1$.

По гистограмме и полигону относительных частот можно судить о форме эмпирической кривой распределения — графике функции $f^*(x)$ (эмпирической плотности вероятности).

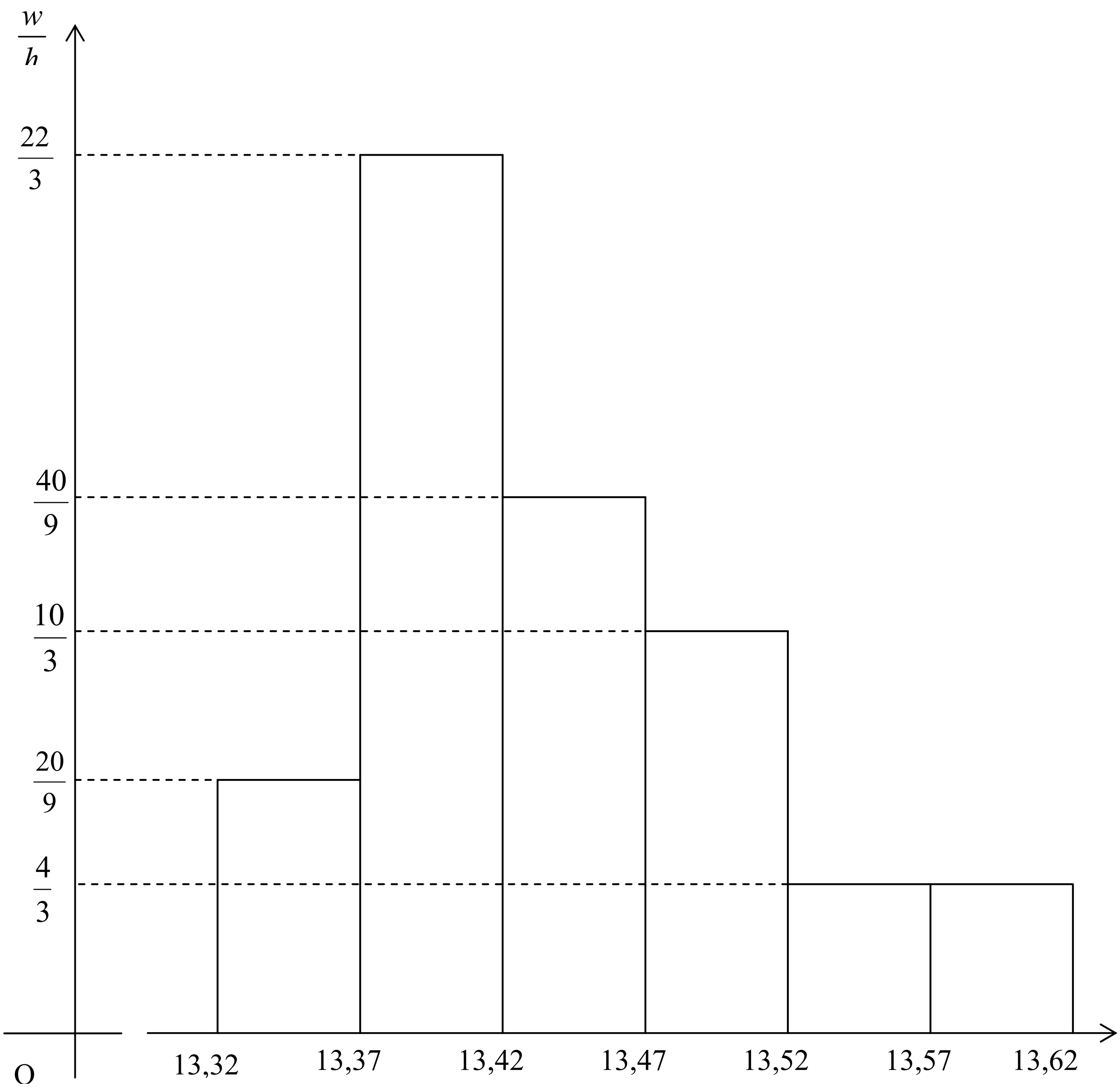

Рисунок 2

3.5 По данным таблицы 3 (стб. 2, 7) найдем эмпирическую функцию распределения

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}.$$

Таблица 4 — Эмпирическая функция распределения

X	$\le 13{,}32$	13,37	13,42	13,47	13,52	13,57	>13,62
$F^*(x)$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{43}{90}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{39}{45}$	$\frac{42}{45}$	1

Построим график $F^*(x)$: сначала на интервалах $(-\infty; 13{,}32)$ и $(13{,}62; \infty)$, а затем в указанных в таблице 4 точках. Учитывая непрерывность функции $F^*(x)$, полученные точки соединим (рисунок 3).

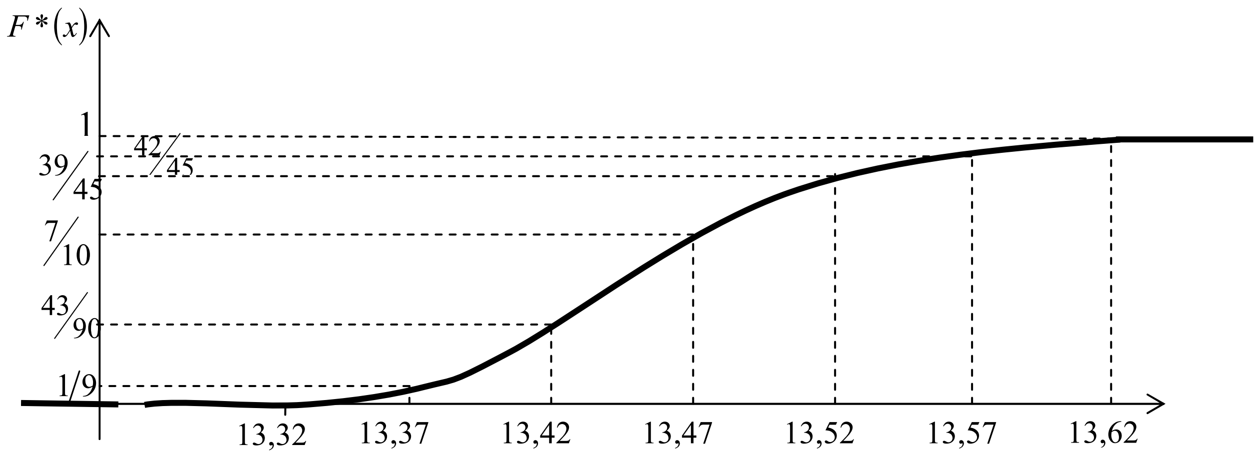

Рисунок 3

3.6 Находим $M_в(X)=\overline{X}$ по формуле

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} y_i\cdot n_i\ , \qquad (2)$$

где y_i — середина *i*-го интервала;

n_i — его частота;

n — объём выборки (таблица 3, стб. 4, 10).

$$\overline{X}=\frac{1}{90}\cdot(13{,}345\cdot 10+13{,}395\cdot 33+13{,}445\cdot 20+13{,}495\cdot 15+13{,}545\cdot 6+13{,}595\cdot 6)=$$

$$=\frac{1}{90}\cdot(133{,}45+442{,}035+268{,}9+202{,}425+81{,}27+81{,}57)=\frac{1}{90}\cdot 1209{,}65\approx 13{,}44\,.$$

Вычислим $Д_в(X)$ по формуле

$$Д_в(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6}\left(y_i-\overline{X}\right)^2\cdot n_i\ . \qquad (3)$$

$$Д_в(X)=\frac{1}{90}\Big((13{,}345-13{,}44)^2\cdot 10+(13{,}395-13{,}44)^2\cdot 33+(13{,}445-13{,}44)^2\cdot 20+$$

$$+(13{,}495-13{,}44)^2\cdot 15+(13{,}545-13{,}44)^2\cdot 6+(13{,}595-13{,}44)^2\cdot 6\Big)=$$

$$=\frac{1}{90}(0{,}09025+0{,}066825+0{,}0005+0{,}045375+0{,}06615+0{,}14415)=$$

$$=\frac{1}{90}\cdot 0{,}4794\approx 0{,}0053\,.$$

$$\sigma_в(X) = \sqrt{Д_в(X)} = \sqrt{\frac{1}{90} \cdot 0{,}4794} \approx 0{,}073.$$

Замечание 6. Вычислить средние арифметические наблюдаемых значений случайных величин X и $\left(X - M(X)\right)^2$ *можно по формулам:*

$$\overline{X} = \frac{\sum_i x_i m_i}{n}, \quad Д_в(X) = \frac{\sum_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2 \cdot m_i}{n} = \frac{\sum_i x_i^2 m_i}{n} - \overline{X}^2$$ *(данные в таблице 2).*

3.7 Полигон и гистограмма относительных частот (см. рисунки 1 и 2) напоминают нормальную кривую (рисунок 4, кривая Гаусса). Поэтому *предположим*, что распределение СВ X (диаметра головки заклепки) является *нормальным*.

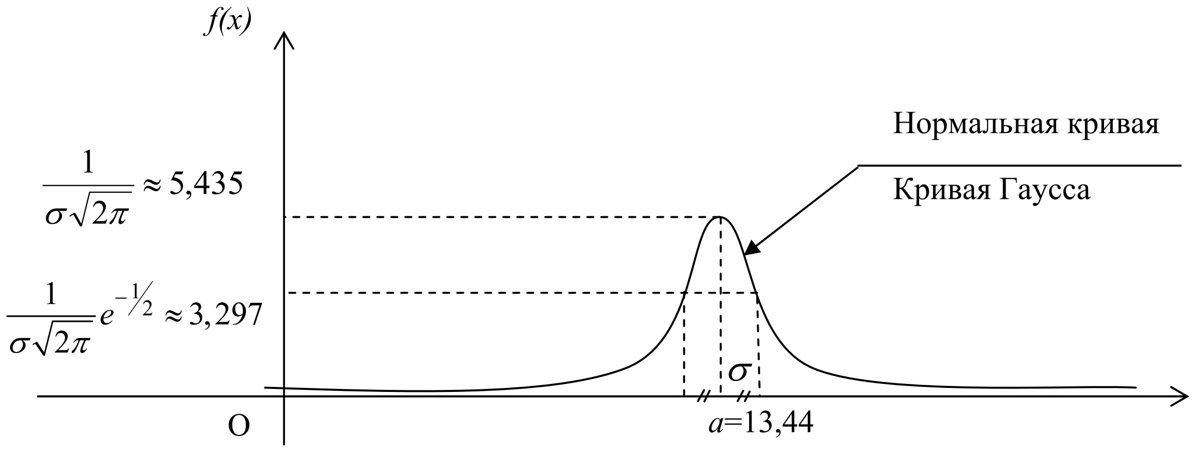

Рисунок 4

3.8 Плотность вероятности и функция распределения СВ X, распределённой по нормальному закону, имеют вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \tag{4}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \tag{5}$$

Найдем точечные оценки параметров $a = M(X)$ и $\sigma = \sigma(X)$ нормального распределения:

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{a}=\overline{X}\approx 13,44;\\&\sigma_{в}=\sqrt{\tilde{Д}(X)}=\sqrt{\frac{n}{n-1}Д_{в}(X)}=\sqrt{\frac{1}{89}\cdot 0,4794}\approx 0,0734\end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

Замечание 7. Значение числовой характеристики, вычисленное на основе ограниченного числа опытов, называют её оценкой. Статистическую оценку, которая определяется одним числом, называют точечной.

Любая из таких оценок случайна, при пользовании ею возможны ошибки. Желательно выбрать такую оценку, чтобы эти ошибки были минимальными.

Чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых характеристик, они должны удовлетворять определенным требованиям. Укажем эти требования.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ *наблюдаемые значения СВ X и обозначим через* $\tilde{\theta}_n=\tilde{\theta}_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ *оценку характеристики* θ, *вычисленную на основе этого статистического материала.*

Оценку $\tilde{\theta}_n$ *называют состоятельной, если для любого* $\varepsilon>0$ *при* $n\to\infty$ $P\left(\left|\tilde{\theta}_n-\theta\right|<\varepsilon\right)\to 1$.

Будем называть $\tilde{\theta}_n$ *несмещенной оценкой характеристики* θ, *если при любом* n $M\left(\tilde{\theta}_n\right)=0$.

Эффективной называют оценку $\tilde{\theta}_n$, *которая при заданном объеме выборки n имеет наименьшую дисперсию* $Д(\tilde{\theta}_n)$ *- min.*

$$\tilde{M}(X)=M_{в}(X)=\overline{X}=\frac{\sum\limits_i x_i m_i}{n}\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} y_i n_i}{n},$$

$$\tilde{Д}(X)=\frac{n}{n-1}Д_{в}(X)=\frac{\sum\limits_i\left(x_i-\overline{X}\right)^2 m_i}{n-1}=\frac{n}{n-1}\left(\frac{\sum\limits_i x_i^2 m_i}{n}-\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(y_i-\overline{X}\right)^2 n_i.$$

$\tilde{M}(X)$ *и* $\tilde{Д}(X)$ — *точечные оценки соответственно для* $M(X)$ *и* $Д(X)$, *они удовлетворяют указанным выше требованиям.*

Следовательно, *плотность вероятности* предполагаемого распределения $N(a,\sigma)$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{0,0734\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-13,44)^2}{0,0108}},$$

её график изображен на рисунке 4, и *функция распределения*

$$F(x)=\frac{1}{0,0734\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-13,44)^2}{0,0108}}dt$$

(учли формулы (4), (5) и (6)).

3.9 Проведем проверку гипотезы о нормальном распределении СВ X — диаметра головки заклепки.

Вероятность попадания СВ X, распределенной по закону $N(a,\sigma)$, в интервал $(\alpha;\beta)$ найдем по формуле

$$p=P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)\right), \tag{7}$$

где $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция Лапласа (если выбрать $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, то в формуле (7) отсутствует множитель $\frac{1}{2}$).

Вероятность попадания СВ X в первый частичный интервал $(-\infty;13,37)$ равна (учтем, что $\Phi(-x)=-\Phi(x)$):

$$p_1=P(-\infty<X<13,37)=\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{13,37-13,44}{0,0734}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-13,44}{0,0734}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\Phi(\infty)-\Phi(0,9537))=\frac{1}{2}(1-0,6579)=0,17105.$$

$$p_2=P(13,37\le X<13,42)=\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{13,42-13,44}{0,0734}\right)-\Phi\left(\frac{13,37-13,44}{0,0734}\right)\right)=$$

$=\frac{1}{2}(\Phi(0,9537)-\Phi(0,2725))\approx\frac{1}{2}(0,6579-0,2128)=0,22255$ — вероятность попадания СВ X в $[13,37;13,42)$.

$$p_3=P(13,42\le X<13,47)=\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{13,47-13,44}{0,0734}\right)-\Phi\left(\frac{13,42-13,44}{0,0734}\right)\right)=$$

$=\frac{1}{2}(\Phi(0,4086)+\Phi(0,2725))\approx\frac{1}{2}(0,3182+0,2128)=0,2655$ — вероятность попадания СВ X в $[13,42;13,47)$.

$$p_4 = P(13{,}47 \le X < 13{,}52) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{13{,}52 - 13{,}44}{0{,}0734}\right) - \Phi\left(\frac{13{,}47 - 13{,}44}{0{,}0734}\right)\right) =$$

$= \frac{1}{2}(\Phi(1{,}0899) - \Phi(0{,}4087)) \approx \frac{1}{2}(0{,}7243 - 0{,}3182) = 0{,}20305$ — вероятность попадания СВ X в $[13{,}47;13{,}52)$.

$$p_5 = P(13{,}52 \le X < 13{,}57) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{13{,}57 - 13{,}44}{0{,}0734}\right) - \Phi\left(\frac{13{,}52 - 13{,}44}{0{,}0734}\right)\right) =$$

$= \frac{1}{2}(\Phi(1{,}7711) - \Phi(1{,}0899)) \approx \frac{1}{2}(0{,}9233 - 0{,}7243) = 0{,}0995$ — вероятность попадания СВ X в $[13{,}52;13{,}57)$.

$$p_6 = P(13{,}57 \le X < +\infty) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\infty - 13{,}44}{0{,}0734}\right) - \Phi\left(\frac{13{,}57 - 13{,}44}{0{,}0734}\right)\right) =$$

$= \frac{1}{2}(\Phi(\infty) - \Phi(1{,}7711)) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}9233) = 0{,}03835$ — вероятность попадания СВ X в $[13{,}57;\infty)$.

1 Проверим гипотезу о нормальном распределении с помощью критерия согласия χ^2 – Пирсона. Вычисления, необходимые для определения наблюдаемого значения выборочной статистики χ^2, проведем в таблице 4.

Таблица 4 — Определение выборочной статистики χ^2

Интервал наблюдаемых значений СВ X	Частота n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
$(-\infty;13{,}37)$	10	0,17105	15,3945	29,1006	1,8903
$[13{,}37;13{,}42)$	33	0,22255	20,0295	168,2339	8,3993
$[13{,}42;13{,}47)$	20	0,2655	23,895	15,1710	0,6349
$[13{,}47;13{,}52)$	15	0,20305	18,2745	10,7223	0,5867
$[13{,}52;13{,}57)$	6	0,0995	8,955	8,7320	0,9751
$[13{,}57;\ \infty)$	6	0,03835	3,4515	6,4948	1,8817
$\sum$	90	1	90		$\chi^2_{\text{набл.}} = 14{,}368$

Из таблицы распределения χ^2 по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ (см. таблицу 1) и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$ (k — число интервалов, r — число параметров распределения) находим $\chi^2_{0{,}05;\ 3} = 7{,}815$.

Так как $\chi^2_{набл.} > \chi^2_{0,05;\,3}$, то отклоняем гипотезу о нормальном распределении диаметров головок заклепок.

2 Проверим гипотезу о нормальном распределении с помощью критерия согласия λ – Колмогорова.

Все вспомогательные расчеты, необходимые для нахождения выборочной характеристики λ, сведем в таблицу 5.

Таблица 5 — Нахождение выборочного значения λ

Интервалы наблюдаемых значений СВХ	Частота n_i	n_x	p_i	$F^*(x)=\dfrac{n_x}{n}$	$F(x)=P(X<x)$	$\lvert F^*(x)-F(x)\rvert$
$(-\infty;13,37)$	10	10	0,17105	$1/9$	0,17105	0,0599
$[13,37;13,42)$	33	43	0,22255	$43/90$	0,3936	0,0842
$[13,42;13,47)$	20	63	0,2655	$7/10$	0,6591	0,0409
$[13,47;13,52)$	15	78	0,20305	$39/45$	0,86215	0,0045
$[13,52;13,57)$	6	84	0,0995	$42/45$	0,96165	0,0283
$[13,57;\ \infty)$	6	90	0,03835	1	1	0
$\sum$	90	—	—	—	—	—

$$Д = max\lvert F^*(x) - F(x)\rvert = 0{,}0842, \qquad \lambda_{набл.} = Д \cdot \sqrt{n} = 0{,}0842 \cdot \sqrt{90} \approx 0{,}7988.$$

По таблице квантилей распределения Колмогорова [1, приложения] и уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ (надежность $P = 1 - \alpha = 0{,}95$) находим критическое значение $\lambda_{0,05} = 1{,}358$.

Так как $\lambda_{набл.} < \lambda_{0,05}$, то нет оснований для отклонения гипотезы о нормальном распределении диаметров головок заклепок.

3.10 Замечание 8. При выборке малого объёма точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемой характеристики. По этой причине при небольшом объёме выборки следует пользоваться интервальными оценками.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала. Интервальные оценки позволяют обеспечить точность и надежность. Выясним смысл этих понятий.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика $\theta_в$ служит оценкой неизвестного параметра θ. Ясно, что $\theta_в$ тем точнее определяет параметр θ, чем меньше $\lvert\theta_в - \theta\rvert$, т. е. если $\delta > 0$ и $\lvert\theta_в - \theta\rvert < \delta$, то чем меньше δ, тем оценка $\theta_в$ точнее (положительное число δ характеризует точность оценки).

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка $\theta_в$ удовлетворяет неравенству $\left|\theta_в - \theta\right| < \delta$, можно лишь говорить о вероятности Р, с которой это неравенство выполняется.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки параметра θ по $\theta_в$ называют вероятность $P = 1 - \alpha$ (α —уровень значимости), с которой осуществляется неравенство $\left|\theta_в - \theta\right| < \delta$. Обычно надежность оценки задают, причем в качестве Р берут число близкое к единице:

$$P\left(\left|\theta - \theta_в\right| < \delta\right) = 1 - \alpha .$$

Заменив неравенство $\left|\theta_в - \theta\right| < \delta$ равносильными ему $-\delta < \theta - \theta_в < \delta$ или $\theta_в - \delta < \theta < \theta_в + \delta$, имеем

$$P\left(\theta_в - \delta < \theta < \theta_в + \delta\right) = 1 - \alpha .$$

Это равенство следует понимать так: вероятность того, что интервал $\left(\theta_в - \delta; \theta_в + \delta\right)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ, равна $1 - \alpha$.

Доверительным называют интервал $\left(\theta_в - \delta; \theta_в + \delta\right)$, который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью $P = 1 - \alpha$.

Доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание СВ Х с надежностью $P = 1 - \alpha$ имеет вид:

$$\tilde{a} - t\frac{\sigma_в}{\sqrt{n}} < a < \tilde{a} + t\frac{\sigma_в}{\sqrt{n}} . \qquad (8)$$

По таблице квантилей распределения Стьюдента [1, приложения] по заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = n - 1 = 89$ найдем квантиль

$$t = t_{\frac{\alpha}{2}, \nu} = t_{0{,}025;\ 89} = 1{,}987 .$$

Вычислим точность оценки

$$\delta = t \cdot \frac{\sigma_в}{\sqrt{n}} = 1{,}987 \cdot \frac{0{,}073}{\sqrt{90}} \approx 0{,}015 .$$

Искомый доверительный интервал для *M(X)=a* (неравенства (8)):

$$13{,}44 - 0{,}015 < a \le 13{,}44 + 0{,}015; \qquad 13{,}425 < a \le 13{,}455 .$$

Полуинтервал $\left(13{,}425; 13{,}455\right]$ накрывает неизвестное М(Х) с вероятностью $p = 0{,}95$.

Доверительный интервал, накрывающий среднее квадратическое отклонение СВ X с надежностью $P = 1 - \alpha$:

$$\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\ \nu}}} \cdot \sigma_в < \sigma < \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\ \nu}}} \cdot \sigma_в \qquad (9)$$

или короче

$$j_1 \cdot \sigma_в < \sigma < j_2 \cdot \sigma_в \quad ,$$

где $j_1 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\ \nu}}}$, $\qquad j_2 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\ \nu}}}$.

По таблице распределения χ^2 [1, приложения] по заданной доверительной вероятности $p = 0{,}95$ и числу степеней свободы $\nu = 89$ найдем числа $j_1 = 0{,}873$, $j_2 = 1{,}171$.

Искомый доверительный интервал для параметра σ:

$$0{,}873 \cdot 0{,}073 < \sigma < 1{,}171 \cdot 0{,}073; \qquad 0{,}0637 < \sigma < 0{,}0855.$$

Интервал $(0{,}0637;\ 0{,}0855)$ накрывает неизвестное $\sigma(X)$ с вероятностью $p = 0{,}95$.

3.11. Из таблицы 1 имеем $a_0 = a_1 = 13{,}455$. Надо проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 13{,}455$ против альтернативной $H_a : a \neq a_0$ ($a > a_0$ или $a < a_0$).

Замечание 9. Правило 1. Чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0 : a = a_0$ (о равенстве $a = M(X)$ СВ X, распределенной по закону $N(a, \sigma)$, предполагаемому значению a_0) при альтернативной гипотезе $H_a : a \neq a_0$, надо вычислить наблюдаемое значение U-критерия

$$\mathrm{U}_{\text{набл.}} = \frac{\left(\overline{X} - a_0\right)\sqrt{n}}{\sigma_в} \qquad (10)$$

и по таблице значений функции Лапласа [1, приложения] найти критическое значение $U_{кр}$ двусторонней критической области из равенства

$$\Phi\left(U_{кр}\right) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Если $\left|U_{набл.}\right| < U_{кр.}$, то H_0 принимают; если $\left|U_{набл.}\right| > U_{кр.}$, то нулевую гипотезу отклоняют и принимают альтернативную гипотезу $H_a : a \neq a_0$.

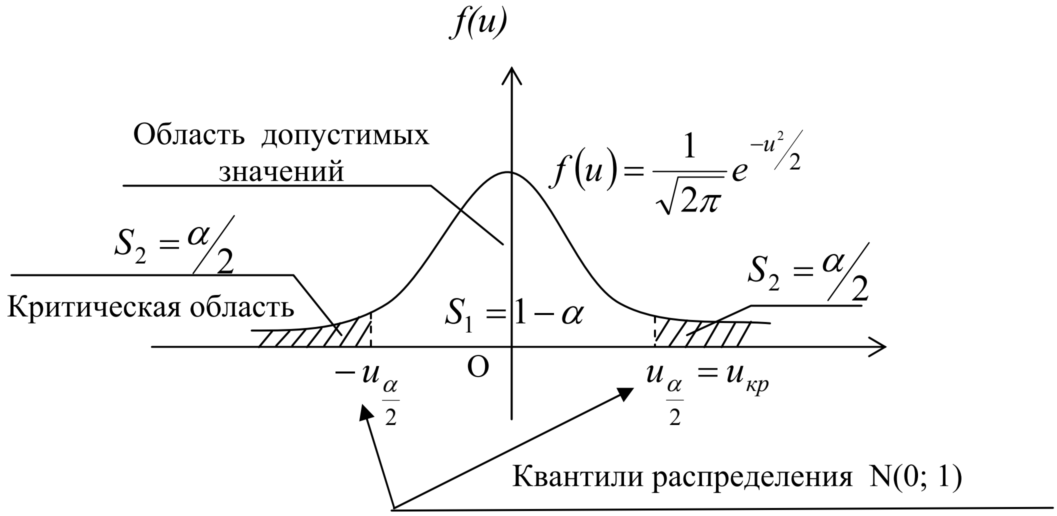

Рисунок 5

Правило 2. Пусть $H_0 : a = a_0$ *и альтернативная гипотеза* $H_a : a > a_0$. *Критическое значение* $U_{кр}$ *правосторонней критической области находят из равенства*

$$\Phi\left(U_{кр.}\right) = \frac{1-2\alpha}{2}.$$

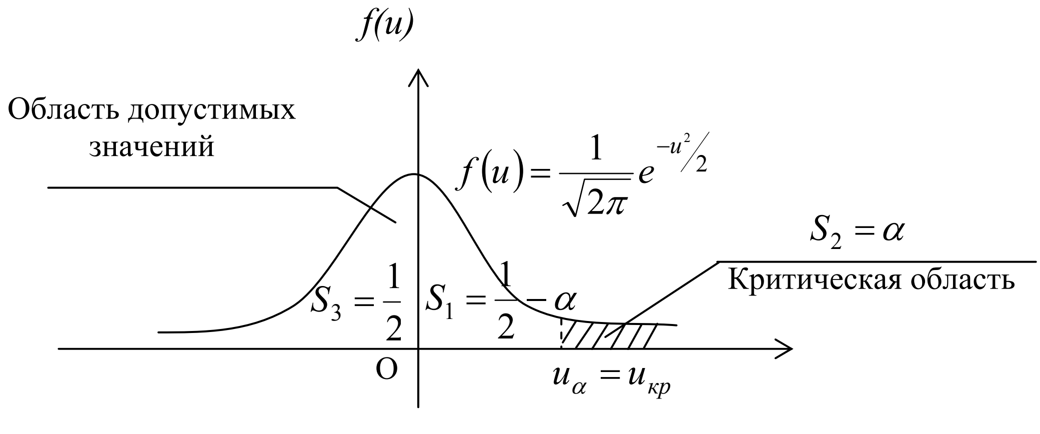

Рисунок 6

Если $U_{набл.} < U_{кр.}$, *то нулевую гипотезу принимают; если* $U_{набл.} > U_{кр.}$, *то нулевую гипотезу отвергают, принимают альтернативную.*

Правило 3. Пусть $H_0 : a = a_0$ *и альтернативная гипотеза* $H_a : a < a_0$. *По правилу 2 находят вспомогательное критическое значение* $U_{кр}$, *полагают* $U^*_{кр.} = -U_{кр.}$ *(граница левосторонней критической области). Если* $U_{набл.} > -U_{кр.}$, H_0 *принимают; если* $U_{набл.} < -U_{кр.}$, H_0 *отвергают* *(наблюдаемое значение U-критерия попадает в критическую область) и принимают альтернативную гипотезу H_a.*

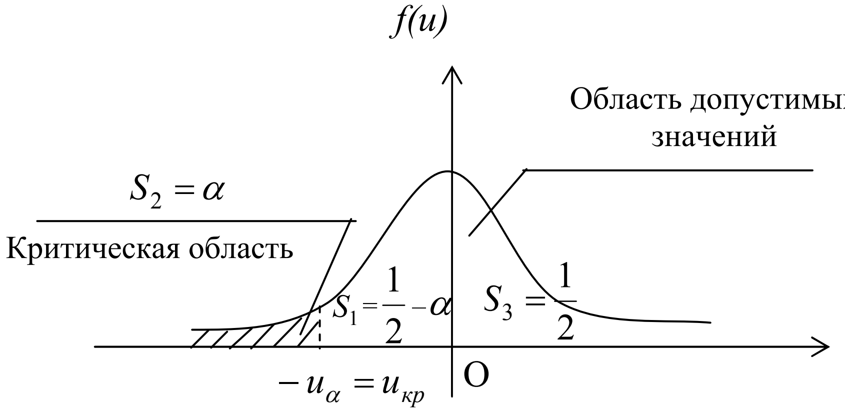

Рисунок 7

Воспользуемся правилом 1. По таблице значений [1, приложения] функции Лапласа $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ и по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ находим

$$\Phi\left(U_{\text{кр.}}\right) = \frac{1 - 0{,}05}{2} = 0{,}475, \qquad U_{\text{кр.}} = 1{,}96\,.$$

Вычислим по формуле (10)

$$U_{\text{набл.}} = \frac{(13{,}44 - 13{,}455)\sqrt{90}}{0{,}073} \approx -1{,}939.$$

Так как $\left|U_{\text{набл.}}\right| < U_{\text{кр.}}$, то нулевую гипотезу принимаем и отвергаем альтернативную гипотезу $H_a : a \neq 13{,}455$.

3.12. Из таблицы 1 имеем $\sigma_0 = \sigma_2 = 0{,}0641$. Проверим гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}0041$ против альтернативной $H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$ $\left(\sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ или } \sigma^2 < \sigma_0^2\right)$.

Замечание 10. Правило 4. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ (о равенстве неизвестной дисперсии σ^2 предполагаемому значению σ_0^2) при альтернативной гипотезе $H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$, вычисляют наблюдаемое значение статистического критерия

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \frac{(n-1)\sigma_в^2}{\sigma_0^2} \tag{11}$$

и по таблице распределения χ^2 *—Пирсона находят критическое значение (по уровню значимости* α *числу степеней свободы* $\nu = n-1$*)* $\chi^2_{кр.} = \chi^2_{\alpha,\nu}$*. Если* $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{кр.}$*, то нулевую гипотезу принимают; если* $\chi^2_{набл.} > \chi^2_{кр.}$*, то отвергают нулевую гипотезу в пользу альтернативной.*

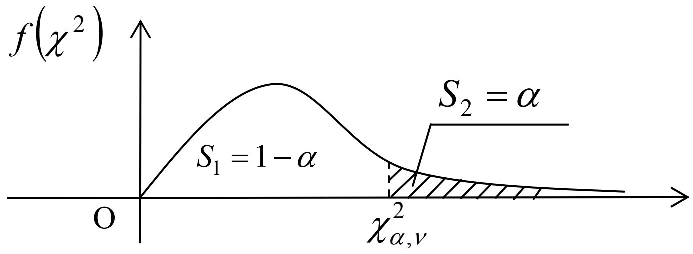

Рисунок 8

Правило 5. Пусть $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ *и альтернативная гипотеза* $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$*. Находят критические левую и правую точки* $\chi^2_{лев.кр.} = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}$ *и* $\chi^2_{прав.\,кр.} = \chi^2_{\frac{\alpha}{2},\nu}$ *по таблице распределения* χ^2 *—Пирсона.*

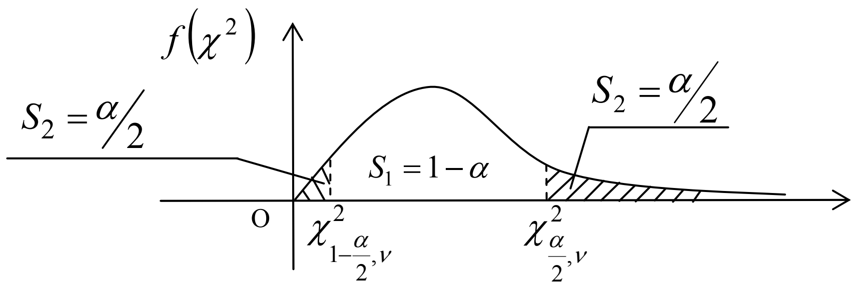

Рисунок 9

Если $\chi^2_{лев.кр.} < \chi^2_{набл.} < \chi^2_{прав.кр.}$ *(наблюдаемое значение критерия попало в область допустимых значений), то нулевую гипотезу* H_0 *принимают. Если* $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{лев.кр.}$ *или* $\chi^2_{набл.} > \chi^2_{прав.кр.}$*, то отклоняют* H_0 *в пользу альтернативной гипотезы* H_a*.*

Правило 6. Пусть $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ *и альтернативная гипотеза* $H_a : \sigma^2 < \sigma_0^2$. *Находят критическое значение* $\chi^2_{кр.} = \chi^2_{1-\alpha,\nu}$. *Если* $\chi^2_{набл.} > \chi^2_{кр.}$, *то* H_0 *принимают; если* $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{кр.}$, *то* H_0 *отклоняют, принимают альтернативную гипотезу* H_a.

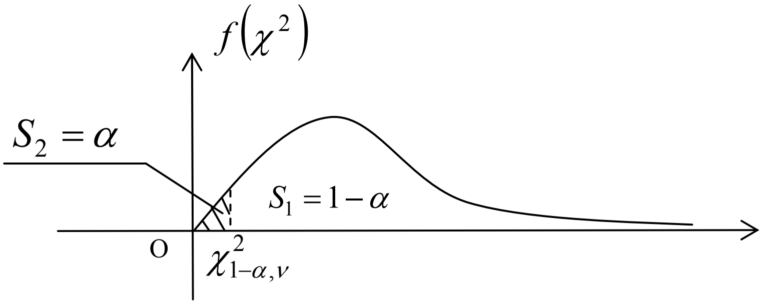

Рисунок 10

Замечание 11. Если число степеней свободы $\nu > 30$, *то* $\chi^2_{\alpha,\nu}$ *можно найти из равенства Уилсона-Гильферти*

$$\chi^2_{\alpha,\nu} = \nu\left(1 - \frac{2}{9\nu} + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right)^3, \qquad (12)$$

где z_α *находят, используя функцию Лапласа* $\Phi\left(z\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, *из равенства* $\Phi\left(z_\alpha\right) = \frac{1-2\alpha}{2}$.

Воспользуемся правилом 4 и замечанием 11:

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \frac{89 \cdot 0{,}0734^2}{0{,}0641^2} \approx 116{,}6987.$$

По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = 89$ находим $\chi^2_{кр.} = \chi^2_{\alpha,\nu}$.

Так как $\nu > 30$, найдем $\Phi\left(z_\alpha\right) = \frac{1 - 2\cdot 0{,}05}{2} = 0{,}45,\quad z_\alpha = 1{,}645$ и по формуле (12) получим:

$$\chi^2_{\alpha,\nu} = \chi^2_{0{,}05;\ 89} = 89\left(1 - \frac{2}{9\cdot 89} + 1{,}645\sqrt{\frac{2}{9\cdot 89}}\right)^3 \approx 112{,}022.$$

$\chi^2_{набл.} > \chi^2_{кр.}$ и потому гипотезу H_0 отвергаем, принимаем гипотезу $H_a : \sigma^2 > 0,0041$.

Список литературы

1 **Герасимович, А. И**. Математическая статистика / А. И. Герасимович. − Минск : Выш. шк., 1983.

2 **Гурский, Е. И.** Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. − Минск : Выш. шк., 1984.

3 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман**.** − М. : Высш. шк., 2002.

4 **Булдык**, **Г. М.** Теория вероятностей и математическая статистика / Г. М. Булдык. − Минск : Высш. шк., 1989.

5 **Калинина, В. Н**. Математическая статистика / В. Н. Калинина, В. Ф. Панкин. − М. : Высш. шк., 1998.

6 **Копытов, А. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика / А. Е. Копытов, Е. А. Гринглаз. − СПб., 2004.

7 **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. − М. : Высш. шк., 2004.

8 **Колемаев, В. А**. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А Колемаев. − М. : Высш. шк., 2002.

9 **Белько, И. В.** Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи / И. В. Белько**.** − Минск : Новое знание, 2002.

10 **Фигуркин, В. А**. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Фигуркин, В. В. Оболонкин. − Минск : Новое знание, 2000.

11 Сборник задач и упражнений по высшей математике. Теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич [и др]. − Минск : Выш. шк., 1996.