ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов специальности 1-27 01 01 «Экономика и организация производства (по направлениям)» заочной формы обучения

Могилев 2017

УДК 517
ББК 22.1 я 73
Л 12

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» мая 2017 г., протокол №9

Составитель ст. преподаватель А. М. Бутома

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. Д. Камчицкая

Методические указания содержат краткие теоретические сведения по курсу «Математические основы теории принятия решений», примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельной подготовки к аудиторной контрольной работе студентов специальности 1-27 01 01 «Экономика и организация производства (по направлениям) заочной формы обучения.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Технический редактор А. М. Бутома

Компьютерная верстка А. М. Бутома

Подписано в печать . Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014 г.
Пр. Мира, 43, 212000, г. Могилев.

Содержание

Введение

Методические рекомендации предназначены для подготовки студентов заочной формы обучения к проведению аудиторной контрольной работы и состоят из трех разделов.

В первом разделе приведен перечень тем и вопросов по программе курса.

Во втором разделе приведены теоретические сведения по обобщенной постановке задачи о принятии решений, по задаче линейного программирования (ЗЛП) и методах ее решения, по постановке и решении транспортной задачи (ТЗ). Во втором разделе также представлены примеры решения ЗЛП графическим методом, симплекс-методом и примеры составления начального опорного плана методом «минимального элемента» и решения ТЗ методом потенциалов.

В третьем разделе представлены задачи с ответами для самостоятельного решения студентами при подготовке к аудиторной контрольной работе.

1 Вопросы по программе курса

Тема 1. Обобщенная постановка задачи о принятии решений

1. Понятие теории принятия решений.
2. Определение задачи принятия решений.
3. Виды задач принятия решений.
4. Определение функции выбора.
5. Определение математической модели. Процедура составления математической модели.

Тема 2. Задача линейного программирования (ЗЛП). Решение ЗЛП графическим методом, симплексным методом. Двойственность в линейной оптимизации

1. Предмет линейного программирования. Понятие задачи линейного программирования (ЗЛП).
2. Формы записи ЗЛП, их эквивалентность. Преобразование ЗЛП к канонической форме.
3. Геометрическая интерпретация и графическое решение ЗЛП.
4. Понятие симплексного метода.
5. Понятие двойственности. Построение пары взаимно двойственных задач.

Тема 3. Постановка и решение транспортной задачи

1. Постановка математической модели транспортной задачи (ТЗ).
2. Условие разрешимости ТЗ.
3. Определение плана ТЗ.
4. Теорема о ранге матрицы. Значение невырожденности плана ТЗ.
5. Схема перехода к нехудшему плану перевозок.
6. Построение начального опорного плана методом «минимального элемента».
7. Построение начального опорного плана методом «северо-западного» угла.
8. Сущность метода потенциалов.
9. Особенности решения ТЗ с открытой моделью.

2 Теоретические сведения и примеры решения задач

2.1 Обобщенная постановка задачи о принятии решений

Теория выбора и принятия решений исследует математические модели процессов принятия решений и их свойства. Основной в ней является задача принятия решений, которая соответствует широкому кругу практических ситуаций, например:

1) на предприятии освободилась должность главного инженера; задача директора – назначить главного инженера;

2) строительному тресту поручено выполнить комплекс работ; задача управляющего трестом – распределить работы по строительным управлениям;

3) транспортному агентству необходимо перевезти заданный объем грузов; задача диспетчера – определить маршрут перевозок.

В этих задачах общим является следующее: имеется множество вариантов (кандидатов на должность, назначенных работ, маршрутов). Необходимо из этого множества выделить некоторое подмножество, в частном случае – один вариант. Представление о качестве вариантов характеризуют принципом оптимальности.

Определение 1. *Задачей принятия решений (ЗПР)* ***назовем пару (X;ОП),*** *где* ***X*** *— множество вариантов,* ***ОП*** *— принцип оптимальности, дающий представление о качестве вариантов. Решением задачи принятия решений является множество*

$$\boldsymbol{X_{оп}} \subseteq \boldsymbol{X},$$

полученное с помощью принципа оптимальности ***ОП****.*

Понятие «оптимальность» описывается функцией выбора.

Определение 2. *Функция выбора — это правило, которое каждому допустимому набору вариантов (решений) ставит в соответствие его поднабор наилучших, или оптимальных вариантов.*

Задачи принятия решений различают в зависимости от имеющейся информации о множестве ***X*** и принципе оптимальности ***ОП***:

1) в общей задаче принятия решений как ***X****, так и* ***ОП*** *могут быть неизвестными; информацию, необходимую для выделения* $\boldsymbol{X_{оп}}$ *получают в процессе решения;*

2) задачу с известным множеством ***X*** *называют задачей выбора;*

3)задачу с известными множеством ***X*** *и принципом оптимальности* ***ОП*** *называют общей задачей оптимизации.*

Таким образом, задача выбора и задача оптимизации являются частными случаями общей задачи принятия решений.

В простейших случаях решение ЗПР находится без использования специальных процедур. Однако в процессе принятия сложных решений появляется необходимость в его формализации, т.е. от науки требуются рекомендации по оптимальному принятию решений. Оптимальные решения позволяют достичь цели при минимальных затратах трудовых, материальных и сырьевых ресурсах.

Определение 3. *Теория принятия оптимальных решений представляет собой совокупность математических и численных методов, ориентированных на нахождение наилучших вариантов из множества альтернатив и позволяющих избежать их полного перебора.*

При решении оптимизационных задач следует основное внимание обратить на предварительный этап (составление математической модели) и на заключительный этап (всесторонний анализ полученного решения).

Определение 4. *Приближенное описание объекта, выраженное с помощью математической символики, называют математической моделью.*

Составление математической модели начинается с выбора переменных, совокупность числовых значений которых однозначно определяет один из вариантов процесса. После выбора переменных необходимо по тексту задачи составить ограничения, которым эти переменные должны удовлетворять. Далее составляется целевая функция (или функции), которая в математической форме отражает критерий (критерии) выбора лучшего варианта. После составления математической модели рассматриваются возможные пути ее упрощения, и затем выбирается подходящий метод для решения задачи.

2.2 Задача линейного программирования (ЗЛП). Решение ЗЛП графическим методом, симплексным методом. Двойственность в линейной оптимизации

Математической основой теории принятия решений является математическое программирование, частью которого является линейное программирование.

Определение 5. *Линейное программирование – это раздел высшей математики, занимающийся разработкой методов отыскания экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.*

Задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции. Однако для исследования линейной функции многих переменных на условный экстремум нельзя применить хорошо разработанные методы математического анализа.

Действительно, пусть необходимо исследовать на экстремум линейную функцию $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ при линейных ограничениях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right)$. Необходимым условием экстремума является

$\frac{\partial Z}{\partial x_j}=0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right)$. Но $\frac{\partial Z}{\partial x_j}=c_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right)$. Так как все коэффициенты линейной функции не могут быть равны нулю, то внутри области, образованной системой ограничений, экстремальные точки не существуют. Они могут быть только на границе области. Для решения таких задач разработаны специальные методы линейного программирования.

2.2.1 Задача линейного программирования (ЗЛП)

Модель задачи линейного программирования может быть записана в одной из приведенных ниже форм:

1) Общая, или произвольная, форма записи:

$$\max(\min) Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i & \left(i=\overline{1,m_1}\right), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & \left(i=\overline{m_1+1,m_2}\right), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i & \left(i=\overline{m_2+1,m}\right), \end{cases} \tag{1}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n_1}\right),\ x_j - \textit{произвольные}\ \left(j=\overline{n_1+1,n}\right).$$

2) Симметричная, или стандартная, форма записи:

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \qquad \textit{или} \qquad \min Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right), \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right), \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right); \qquad x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

3) Каноническая, или основная, форма записи:

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right), \tag{3}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Указанные три формы записи ЗЛП эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть сведена к другой форме.

Пример 1 **–** Привести к канонической форме ЗЛП:

$$\min Z = 6x_1 + 5x_2;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 11x_2 \ge 55, \\ x_1 + \quad x_2 \ge 8, \\ 11x_1 + \ 3x_2 \ge 32, \\ 16x_1 + 13x_2 \le 210, \\ 17x_1 + 12x_2 \le 205, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0 .$$

Решение.

Заменяем функцию Z на $Z' = -Z$. Из левых частей ограничений типа $\ge$ вычитаем неотрицательные переменные x_3, x_4 и x_5, к левым частям ограничений типа $\le$ прибавляем неотрицательные переменные x_6 и x_7. Получаем модель задачи в канонической форме:

$$\max Z' = -6x_1 - 5x_2;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 11x_2 - x_3 = 55, \\ x_1 + \quad x_2 - x_4 = 8, \\ 11x_1 + \ 3x_2 - x_5 = 32, \\ 16x_1 + 13x_2 + x_6 = 210, \\ 17x_1 + 12x_2 + x_7 = 205, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1,7}\right).$$

2.2.2 ***Геометрическая интерпретация и графическое решение ЗЛП.***

Рассмотрим задачу с двумя переменными.

Пусть требуется найти решение $X = \left(x_1, x_2\right)$, доставляющее

$$\max\ (\min)\ Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{4}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{5}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0 . \tag{6}$$

Начнем с геометрической интерпретации области допустимых решений.

Каждое из неравенств (5) определяет на координатной плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость, а система неравенств (5)–(6) в случае ее совместности – их пересечение. Оно может представлять собой выпуклый многоугольник (рисунок 1), неограниченную выпуклую многоугольную область (рисунок 2), быть пустым множеством и.т.д.

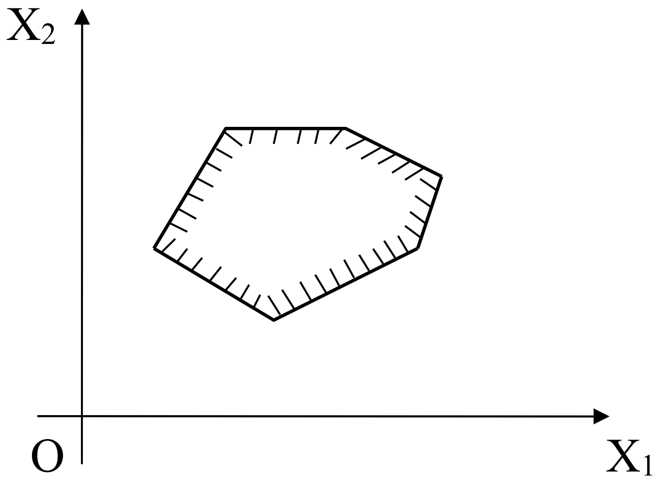

Рисунок 1

Рисунок 2

Перейдем к геометрической интерпретации целевой функции (4). Уравнение $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ при фиксированном значении $Z = Z_0$ определяет на плоскости прямую линию $Z_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$. При изменении Z получим семейство параллельных прямых, называемых *линиями уровня.* Вектор $\vec{c} = (c_1; c_2)$ с координатами из коэффициентов при x_1 и x_2 перпендикулярен к каждой из линий уровня. Вектор $\vec{c}$ $(-\vec{c})$ показывает направление наибольшего возрастания (убывания) целевой функции.

Если построить на одном рисунке область допустимых решений, вектор $\vec{c}$ $(-\vec{c})$ и одну из линий уровня, например, Z=0, то задача сводится к определению в области допустимых решений точки в направлении вектора $\vec{c}$ $(-\vec{c})$, через которую проходит линия уровня $Z_{\max}$ $(Z_{\min})$, соответствующая наибольшему (наименьшему) значению функции Z. Это и есть *графический способ решения ЗЛП.* Если задача разрешима, могут представиться следующие случаи: задача имеет единственное решение (рисунок 3); задача имеет бесконечное множество – альтернативный оптимум (рисунок 4); целевая функция не ограничена; область допустимых решений – единственная точка, задача не имеет решения.

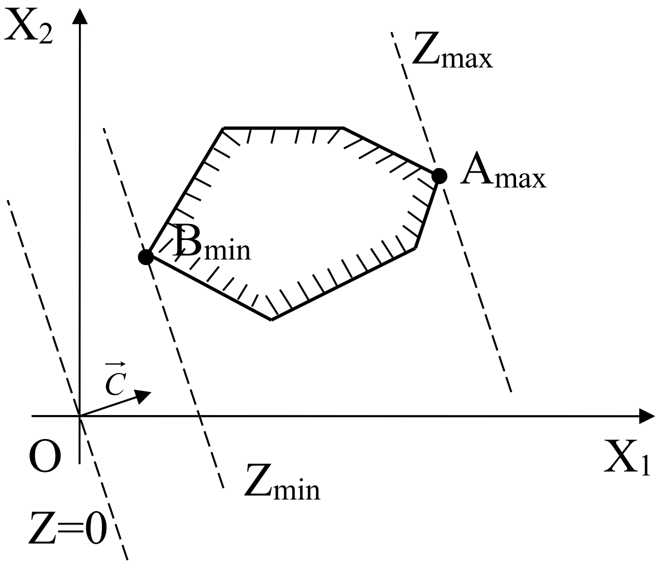

Рисунок 3

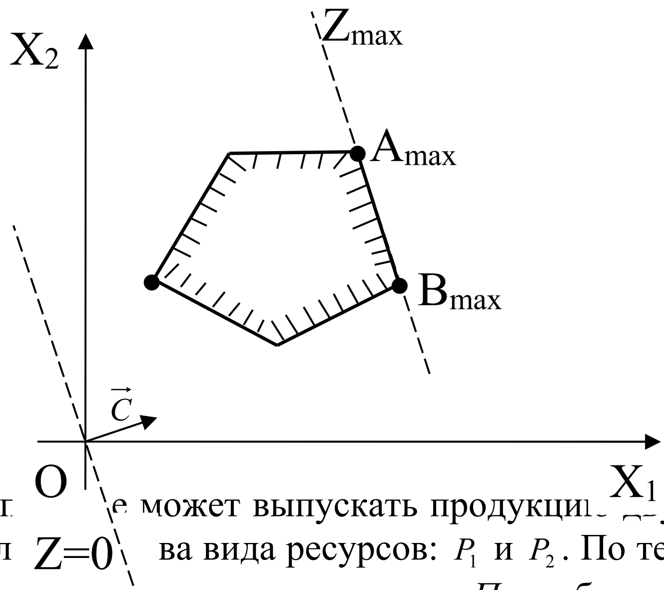

Рисунок 4

Пример 2 – Пред[illegible]е может выпускать продукци[illegible]х видов: $П_1$ и $П_2$. При этом испол[illegible]ва вида ресурсов: P_1 и P_2. По технологическим нормам на производство единицы продукции $П_1$ требуется a_{11} единиц ресурса P_1 и a_{21} единиц ресурса P_2, а на производство единицы продукции $П_2$ требуется по a_{12} и a_{22} единиц тех же ресурсов (где $a_{11} = 6$, $a_{12} = 5$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 5$). Объем ресурсов P_1 и P_2 составляет соответственно $b_1 = 45$ и $b_2 = 30$ единиц. Прибыль от реализации единиц продукции $П_1$ и $П_2$ составляет соответственно $c_1 = 3$ и $c_2 = 3$ денежных единиц. Требуется:

1) свести исходные данные в таблицу, удобную для построения модели;

2) составить математическую модель задачи (показатель эффективности – прибыль);

3) определить оптимальный план выпуска количества единиц продукции $П_1$ и $П_2$, обеспечивающий максимальную прибыль. Найти величину полученной прибыли.

Решение

1) Обозначим через x_1 число единиц продукции *П1*, через x_2 – продукции *П2*, через Z – суммарную прибыль от реализации произведенных изделий. Тогда $X=(x_1;x_2)$ – допустимый план задачи, $Z=Z(X)$ – целевая функция, максимум которой требуется найти.

Исходные данные представим в виде таблицы 1.

Таблица 1

Ресурсы	Затраты на единицу продукции		Объем ресурса	Вид ограничения
	П1	П2		
P_1 P_2	6 3	5 5	45 30	$\leq$ $\leq$
Прибыль, ден. ед.	3	3		
План выпуска, шт.	x_1	x_2		

2) Так как каждое изделие продукции *П1* дает прибыль *3* ден. ед., а таких изделий изготавливается x_1 единиц, то выпуск изделий *П1* даст прибыль $3x_1$, аналогично изделия продукции *П2* обеспечат прибыль $3x_2$. Суммарную прибыль можно записать в виде:

$$Z=3x_1+3x_2. \tag{7}$$

Ресурса P_1 на изготовление одного изделия продукции *П1* требуется *6* единиц, на изготовление одного изделия продукции *П2* – *5* единиц. Ресурса P_2 на изготовление одного изделия продукции *П1* требуется *3* единицы, на изготовление одного изделия продукции *П2* – *5* единиц.

Тогда для изготовления x_1 изделий *П1* и x_2 изделий *П2* потребуется первого ресурса $6x_1+5x_2$ (единиц). Так как объем ресурса P_1 не может превышать 45 единиц, то должно выполняться неравенство

$$6x_1+5x_2\leq 45.$$

Аналогично можно записать условия, налагаемые на объем второго ресурса P_2:

$$3x_1+5x_2\leq 30.$$

Таким образом, искомый план задачи $X=(x_1;x_2)$ должен удовлетворять следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 45, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 30. \end{cases} \tag{8}$$

По смыслу задачи, переменные x_1 и x_2 не могут быть выражены отрицательными числами, поэтому

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \tag{9}$$

План $X = (x_1; x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений (8) и условию неотрицательности (9), называется ***допустимым****. Допустимый план, для которого целевая функция (7) принимает максимальное значение, называется* ***оптимальным*** *и обозначается $X^* = (x_1^*, x_2^*)$.*

Линейная функция (7), максимум которой надо определить, вместе с системой ограничений (8) и условием неотрицательности (9) образуют ***математическую модель задачи.*** *Так как функция (7) линейная, а система (8) содержит только линейные ограничения, то задача (7)–(9) является* ***задачей линейного программирования (ЗЛП).***

Таким образом, математическая модель ЗЛП имеет вид:

$$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 45, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 30. \end{cases} \tag{10}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0.$$

3) Определим план выпуска количества единиц продукции *П₁* и *П₂*, обеспечивающий максимальную прибыль, решив ЗЛП (10) графическим способом.

Для построения области допустимых решений строим в системе x_1Ox_2 соответствующие данным ограничениям-неравенствам граничные прямые:

$$6x_1 + 5x_2 = 45, \quad 3x_1 + 5x_2 = 30.$$

Находим полуплоскости, в которых выполняются данные неравенства. Для этого вследствие выпуклости любой полуплоскости достаточно взять произвольную точку, через которую не проходит соответствующая граничная прямая, и проверить, удовлетворяет ли эта пробная точка ограничению-неравенству (если прямая не проходит через начало координат, то в качестве пробной точки удобно взять точку (0; 0)). Если неравенство выполняется для пробной точки, то оно выполняется для любой точки, принадлежащей той же полуплоскости, что и пробная точка. Если неравенство не выполняется для пробной точки, то выбирается полуплоскость, не содержащая пробной точки. С учетом условий неотрицательности $x_1 \ge 0$,

$x_2 \geq 0$, получаем область допустимых решений – четырехугольник $OABC$, который является выпуклым множеством (выпуклым многоугольником) (рисунок 5).

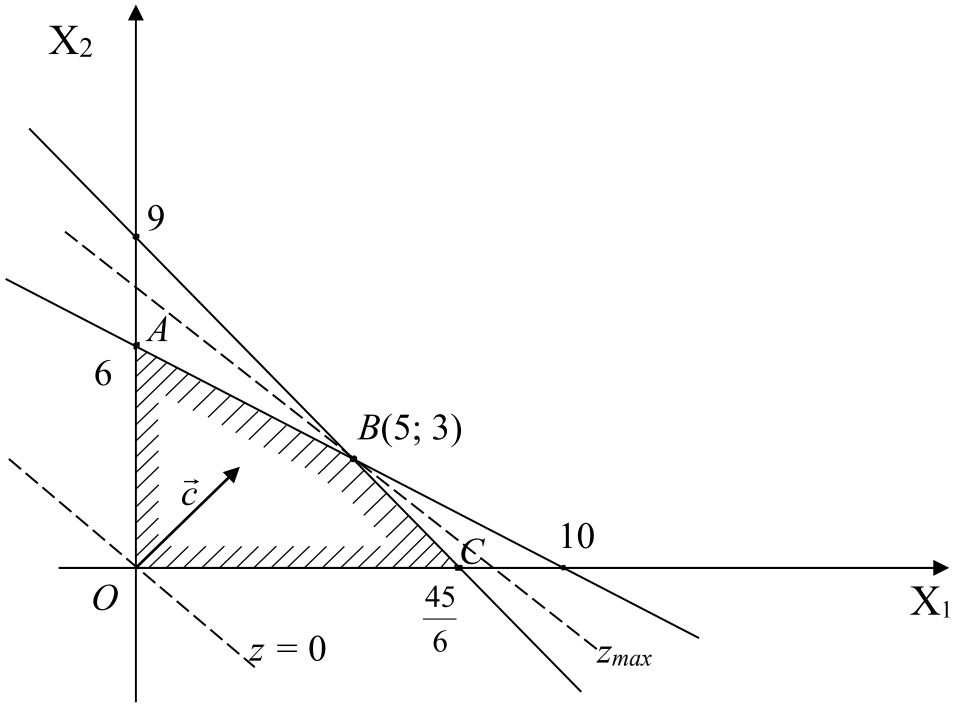

Рисунок 5

Далее строим вектор, в направлении которого целевая функция Z возрастает быстрее всего. Для нашей задачи $\vec{c} = (3; 3)$. Перпендикулярно вектору $\vec{c}$ проводим для удобства через начало координат линию уровня $Z = 0$. Параллельным перемещением прямой $Z = 0$ в направлении вектора $\vec{c}$ находим крайнюю точку *B*, в которой целевая функция достигает максимума. Координаты точки *B* определяются системой

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 45, \\ 3x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases} \quad \text{откуда } B(5;3).$$

Таким образом, имеем оптимальный план $X^* = (5; 3)$, $Z_{\max} = Z(X^*) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 24$.

Следовательно, максимальную прибыль в 24 денежные единицы предприятию обеспечит выпуск изделий в количестве 5 единиц продукции $П_1$ и 3 единиц продукции $П_2$.

2.2.3 Решение задачи линейного программирования симплексным методом.

После составления экономико-математической модели переходят к решению задачи симплекс-методом. Прежде всего, модель преобразуется к каноническому виду и производится построение начального опорного плана.

Говорят, что ограничение канонической ЗЛП имеет предпочтительный вид, если при неотрицательности его правой части $(b_i \geq 0)$ левая часть содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а остальные ограничения – с коэффициентом, равным нулю. Предпочтительные переменные выбираются в качестве базисных, а все остальные – свободные. Свободные переменные приравниваются нулю, а базисные переменные – свободным членам.

Пример 3 – Пусть дана модель ЗЛП. Требуется привести ее к предпочтительному виду и построить начальный опорный план:

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12, \\ \quad x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + x_2 \leq 20, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Решение

Введя дополнительные переменные x_3, x_4, x_5, приведем ЗЛП к канонической форме:

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_2 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 20, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right).$$

Предпочтительными являются переменные x_3, x_4, x_5, их выбираем в качестве базисных. Свободные переменные x_1, x_2. Их приравниваем нулю. Таким образом, начальный опорный план: $X_0 = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = (0;0;12;8;20)$, $Z(X_0) = 0$.

Составим первую симплексную таблицу (таблица 2):

Таблица 2

Базисные переменные	1	Свободные переменные		θ
		$-x_1$	$-x_2$	
x_3	12	1	1	12/1=12
x_4	8	0	$\boxed{1}$	8/1=8
x_5	20	2	1	20/1=20
Z=	0	-2	-4	

Рабочая часть таблицы, начиная со второго столбца и третьей строки, содержит элементы, над которыми будут производиться преобразования с целью получения оптимального плана. В последней строке таблицы записано «нулевое» уравнение (целевая функция Z). Эта строка называется *индексной или строкой оценок*. В первый столбец занесены базисные переменные, а свободные переменные указаны сверху над рабочей частью таблицы. Второй столбец (с единицей) содержит свободные члены $b_i \geq 0$ системы ограничений. Последний столбец предназначен для записи симплексных отношений, которые необходимы для определения разрешающей строки.

Замечание. *Признак оптимальности опорного плана задачи максимизации: если для некоторого опорного плана все оценки индексной строки неотрицательны, то такой план оптимален; если же исходная задача на минимум и для некоторого опорного плана все оценки неположительны, то такой план также оптимален.*

Рассмотрим переход к нехудшему опорному плану.

1) Среди отрицательных оценок индексной строки выбирают максимальную по абсолютной величине (для данной задачи это -4), которая указывает на разрешающий столбец. Если задача решается на минимум, то разрешающий столбец выбирается по максимальной положительной оценке. Разрешающий столбец указывает на переменную, вводимую в базис.

2) Разрешающая строка выбирается в соответствии с минимальным симплексным соотношением $\theta = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\right\}$. *Разрешающая строка соответствует переменной, выводимой из базиса.*

3) Элемент (a_{rs}), *стоящий на пересечении разрешающего столбца и строки, называется разрешающим.*

4) Чтобы завершить шаг преобразований, ведущих к новому опорному плану, следующую симплексную таблицу составляют по следующим правилам:

– разрешающий элемент заменяется обратной величиной;

– остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;

– остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняются знаки;

– прочие элементы вычисляются по правилу прямоугольника: $\left(a_{ij}\right)' = a_{ij} - \dfrac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}$*, где* a_{is} *– элемент, стоящий на пересечении* i *-ой строки и разрешающего столбца,* a_{rj} *– элемент, стоящий на пересечении разрешающей строки и* j *-го столбца.*

После проведения соответствующих симплексных преобразований над таблицей 2, получим таблицу 3.

Таблица 3

Базисные переменные	1	Свободные переменные		θ
		$-x_1$	$-x_4$	
x_3	4	$\boxed{1}$	-1	4/1=4
x_2	8	0	1	-
x_5	12	2	-1	12/2=6
Z=	32	-2	4	

План X_1=(0;8;4;0;12) не является оптимальным, так как в индексной строке имеется отрицательная оценка, при этом значение целевой функции $Z(X_1)$=32.

Продолжая симплексные преобразования, получим таблицу 4:

Таблица 4

Базисные переменные	1	Свободные переменные	
		$-x_3$	$-x_4$
x_1	4	1	-1
x_2	8	0	1
x_5	4	-2	1
Z=	40	2	2

В индексной строке таблицы 4 нет отрицательных элементов. Таким образом, оптимальный план имеет вид: X^*= (4;8;0;0;4); $Z(X^*)$=40

Замечания:

1) если в индексной строке последней симплексной таблицы (содержащей оптимальный план) имеется хотя бы одна нулевая оценка, соответствующая свободной переменной, то ЗЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов (альтернативный оптимум);

2) если в разрешающем столбце нет ни одного положительного элемента, то целевая функция на множестве допустимых планов является неограниченной.

2.2.4 Понятие двойственности. Построение пары взаимно двойственных задач.

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной.* Первоначальная задача называется *прямой* или *исходной.* Многие ЗЛП первоначально ставятся в виде исходных или двойственных задач, поэтому говорят о паре взаимно двойственных, симметричных, задач линейного программирования, которые имеют вид:

прямая задача	*двойственная задача*
$\max Z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j,$	$\min f = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i,$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right),$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right),$
$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$	$y_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$

Рассмотренная пара взаимно двойственных задач может быть экономически интерпретирована так.

Прямая задача: сколько и какой продукции x_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ надо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции c_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$, объемах имеющихся ресурсов b_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ и нормах расходов a_{ij} максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении?

Двойственная задача: какова должна быть оценка единицы каждого из ресурсов y_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$, чтобы при заданных b_i, c_j и a_{ij} минимизировать общую оценку затрат на все ресурсы?

Для построения двойственной задачи необходимо пользоваться следующими правилами:

1) если прямая задача решается на максимум, то двойственная – на минимум, и наоборот;

2) в задаче на максимум ограничения – неравенства имеют знак «$\le$», а в задаче минимизации – «$\ge$»;

3) каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, и наоборот, каждому ограничению двойственной задачи соответствует переменная прямой задачи;

4) матрица системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы системы ограничений исходной задачи транспонированием;

5) свободные члены системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами при соответствующих переменных целевой функции двойственной задачи, и наоборот;

6) если на переменную прямой задачи наложено условие неотрицательности, то соответствующее ограничение двойственной задачи записывается как ограничение-неравенство, если же нет, то как ограничение-равенство;

7) если какое-либо ограничение прямой задачи записано как равенство, то на соответствующую переменную двойственной задачи условие неотрицательности не налагается.

Пример 4 **–** Дана прямая задача:

$$\max \quad Z = 2x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ \quad x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 20, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Составить двойственную задачу.

Решение.

Для того чтобы составить модель двойственной задачи, напишем матрицу исходной (прямой) задачи и транспонируем ее.

Матрица прямой задачи имеет вид:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 20 \\ \hline 2 & 4 & Z_{\max} \end{array}\right).$$

Матрица двойственной задачи имеет вид:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline 12 & 8 & 20 & f_{\min} \end{array}\right).$$

По последней матрице запишем модель двойственной задачи:

$$\min \quad f = 12y_1 + 8y_2 + 20y_3,$$

$$\begin{cases} y_1 \qquad + 2y_3 \ge 2, \\ y_1 + y_2 + y_3 \ge 4, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\; y_2 \ge 0, y_3 \ge 0.$$

2.3 Транспортная задача

Решение транспортной задачи позволяет разработать наиболее рациональные пути и способы транспортирования товаров, устранить чрезмерно дальние, встречные, повторные перевозки. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий и фирм, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т.д.

Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющих ничего общего с транспортировкой груза.

2.3.1 Постановка транспортной задачи в матричной форме

Приведем простейшую формулировку *транспортной задачи* по критерию стоимости.

В m пунктах производства $A_1, \dots, A_m$ находится однородный продукт (сахар, уголь, картофель и т. д.) в количествах соответственно $a_1, \dots, a_m$, который должен быть доставлен n потребителям $B_1, \dots, B_n$ в количествах b_1 ,..., b_n. Известны транспортные издержки c_{ij} (расходы), связанные с перевозкой единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$.

Требуется составить такой план перевозок, который обеспечивал бы при минимальных транспортных издержках удовлетворение спроса всех пунктов потребления за счет распределения всего продукта, произведенного всеми пунктами производства.

Для разрешимости поставленной задачи необходимо и достаточно, чтобы сумма запасов равнялась сумме спроса всех пунктов, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{11}$$

Для наглядности транспортную задачу представим в виде таблицы, которая называется *распределительной* (таблица 5):

Таблица 5

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…

A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Определение 6 Матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}$ называется *матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов)*, а числа c_{ij} – *тарифами.*

Определение 7 *Планом* транспортной задачи называется матрица $X=(x_{ij})_{m\times n}$, где каждое число x_{ij} обозначает количество единиц груза, которое надо доставить из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения.

Матрицу X называют также *матрицей перевозок.*

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям по запасам (12), ограничениям по потребностям (13), условиям неотрицательности (14), т.е.:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad \left(i=\overline{1,m}\right); \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad \left(j=\overline{1,n}\right); \tag{13}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right) \tag{14}$$

Общие суммарные затраты, связанные с реализацией плана перевозок, можно представить целевой функцией:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{ij}x_{ij} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \tag{15}$$

Таким образом, математически транспортная задача ставится так: *требуется найти $m\times n$ переменных величин x_{ij}, удовлетворяющих системам уравнений (ограничений) (12-13) и условиям неотрицательности (14), для которых целевая функция (15) принимает минимальное значение.*

Для решения транспортной задачи важное значение имеет теорема о ранге матрицы.

Теорема 1 *Ранг матрицы транспортной задачи на единицу меньше числа уравнений, т. е. r=m+n-1.*

Определение 8. Если число занятых клеток удовлетворяет условию *m+n-1,* то план перевозок называют *невырожденным*, а если число занятых клеток не удовлетворяет этому условию, то план перевозок называют *вырожденным*.

План перевозок транспортной задачи будем отыскивать непосредственно в матрице перевозок. Заметим, что если переменная x_{ij} принимает значение $a_{ij}\neq0$, то в соответствующую клетку (i,j) будем записывать это значение, если же $x_{ij}=0$, то клетку (i,j) оставляем свободной. Согласно теореме 1, в каждой матрице перевозок опорный план должен содержать $m+n-1$ занятых клеток, а остальные – свободные.

Транспортную задачу будем решать с помощью общего приема последовательного улучшения планов, состоящего из следующих основных этапов:

1) определения исходного опорного плана;

2) оценки этого плана;

3) перехода к следующему плану путем однократного замещения одной базисной переменной на свободную.

2.3.2 Определение исходного опорного плана

Для построения начального опорного задачи используются следующие правила: правило «северо-западного угла», правило «минимального элемента», метод Фогеля.

Наиболее оптимальным является *правило «минимального элемента».*

Сущность его состоит в том, что на каждом шаге осуществляется максимально возможная поставка в клетку с минимальным тарифом c_{ij}. Заполнение таблицы начинаем с клетки, которой соответствует наименьший элемент c_{ij} из всей матрицы тарифов. Затем остаток по столбцу или строке помещаем в клетку того же столбца или строки, которой соответствует следующее по величине значение c_{ij}, и т.д.

Пример 5 – Найти опорный план по правилу «минимального элемента».

Таблица 6

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	1	50
Потребность в грузе	75	80	60	85	300

Решение

Выбираем наименьший тариф из таблицы 6:

Наименьшие тарифы соответствуют клеткам (2, 1), (3, 4): $c_{21}=c_{34}=1$.

Поместим необходимое количество груза, например, в клетку (2, 1) (таблица 7): $x_{21}=75$, остаток груза помещаем в клетку (2, 2), для которой тариф $c_{22}=2$, при этом $x_{22}=\min(80; 150-75)=75$. Второму потребителю необходимо еще 5 единиц груза (80-75). В клетку (1, 2) от поставщика A_1 помещаем $x_{12}=\min(5; 100)=5$ единиц груза.

Далее по первой строке в клетку (1, 3), для которой тариф относительно невысок по сравнению с занятой клеткой, заносим необходимое количество груза $x_{13}=\min(60; 95)=60$ единиц груза.

Остаток груза от поставщика A_1 заносим в клетку (1, 4), т.е. $x_{14}=\min(85; 35)=35$ единиц груза.

Спрос четвертого потребителя удовлетворен не полностью, поэтому по столбцу в клетку (3, 4) от поставщика A_3 помещаем необходимое количество груза $x_{34}=50$ единиц.

В результате распределения в таблице 7 получаем опорный план X:

Таблица 7

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7 5	3 60	5 35	100
A_2	1 75	2 75	5	6	150
A_3	3	10	20	1 50	50
Потребность в грузе	75	80	60	85	300

$$X=\begin{pmatrix}0 & 5 & 60 & 35\\ 75 & 75 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 50\end{pmatrix}.$$

Замечание. Может оказаться, что при построении опорного плана занятых клеток будет меньше чем $m+n-1$, т.е. задача является *вырожденной*. Тогда в свободную клетку (обычно в ту, которой соответствует наименьший тариф) заносится «базисный» нуль, и эта клетка считается занятой.

Рассмотрим правило "северо-западного элемента". Распределение груза начинается с загрузки левой верхней клетки (1;1), двигаясь затем от нее по строке вправо или по столбцу вниз. В клетку (1;1) занесем меньшее из чисел a_1, b_1, т.е. $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ и первый потребитель B_1 будет полностью удовлетворен. В дальнейшем первый столбец таблицы распределения в расчет не принимается.

Двигаясь вправо по первой строке таблицы, заносим в соседнюю клетку (1;2) меньшее из чисел $(a_1 - b_1)$ и b_2. Если $a_1 - b_1 < b_2$, то запасы первого поставщика исчерпаны, и первая строка таблицы в дальнейшем в расчет не принимается. Переходим к аналогичному распределению груза второго поставщика.

Если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$. При этом запас первого поставщика будет исчерпан, поэтому первая строка из дальнейшего рассмотрения исключается. Переходим к распределению запасов второго поставщика. В клетку (2:1) заносим наименьшее из чисел $(a_2, b_1 - a_1)$.

Заполнив, таким образом, клетку (1;2) или (2;1), переходим к загрузке следующей клетки по второй строке либо по второму столбцу. Процесс распределения по второй, третьей и последующим строкам (столбцам) производится аналогично распределению по первой строке или первому столбцу до тех пор, пока не исчерпаются ресурсы. Последней заполняется клетка $(m;n)$.

2.3.3 Решение транспортной задачи методом потенциалов

Сущность *метода потенциалов* состоит в следующем. После того как найден исходный опорный план перевозок, каждому поставщику A_i (каждой строке) ставится в соответствие некоторое число u_i ($i = \overline{1, m}$), а каждому потребителю B_j (каждому столбцу) – некоторое число v_j $(j = \overline{1, n})$. Числа u_i и v_j называются *потенциалами* соответственно поставщика A_i и потребителя B_j и выбираются так, чтобы в любой загруженной клетке их сумма равнялась тарифу этой клетки, т. е. $u_i+v_j=c_{ij}$. Так как всех потенциалов $m+n$, а занятых клеток $m+n-1$, то для определения чисел u_i и v_j придется решать систему из $m+n-1$ уравнений $u_i+v_j=c_{ij}$ с $m+n$ неизвестными. В этом случае одной из неизвестных можно придать произвольное значение, и тогда система будет иметь единственное решение, т. е. все остальные $m+n-1$ неизвестных определятся однозначно. Затем для проверки оптимальности плана просматриваются свободные клетки (i,j) и для каждой из них вычисляется разность s_{ij} между тарифом c_{ij} и суммой u_i+v_j потенциалов строки и столбца. План оптимален тогда, когда для каждой свободной клетки (i,j) разность s_{ij} есть величина неотрицательная, т. е. $s_{ij}= c_{ij}-(u_i+v_j)\geq 0$.

Полученные разности называются *оценками (характеристиками) свободных клеток.* Отрицательные оценки указывают на перспективность клеток, загрузка их приведёт к улучшению плана. Положительные и нулевые оценки исключают возможность улучшения полученного плана.

Переход к новому плану осуществляется по общим правилам распределительного метода. Для наиболее перспективной клетки строится замкнутый контур, вершинам которого приписываются чередующиеся знаки (свободной клетке приписывается положительный знак). В клетках, соответствующих отрицательным вершинам, отыскивается наименьший груз, который и «перемещается» по клеткам замкнутого цикла, т. е. прибавляется к клеткам со знаком плюс, включая свободную, и вычитается из клеток со знаком минус.

В новом плане вновь определяются потенциалы строк и столбцов и вычисляются оценки для всех свободных клеток. Когда среди оценок не окажется отрицательных, полученный план будет оптимальным.

Итак, чтобы решить транспортную задачу методом потенциалов, необходимо:

1) построить опорный план перевозок по одному из вышеизложенных правил;

2) вычислить потенциалы u_i и v_j соответственно поставщиков и потребителей

3) вычислить суммы потенциалов (косвенные тарифы) для свободных клеток $u_i + v_j = c'_{ij}$*;*

4) проверить разность $s_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$.

Если все $s_{ij} \geq 0$ для свободных клеток, полученный план оптимален. Если хотя бы одна оценка $s_{ij} < 0$, в число занятых вводят клетку, для которой оценка минимальна, и получают новый план перевозок.

Процесс продолжают до тех пор, пока не будет получен план, для которого все оценки $s_{ij} \geq 0$.

Пример 6 **–** Совхозы A_1, A_2, A_3 выделяют соответственно 30, 40 и 20 ц молока для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3, B_4. Стоимость перевозки и потребности пунктов B_j даны в таблице 8:

Таблица 8

Совхоз	Потребитель				Предназначено для вывоза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	5	4	30
A_2	3	2	4	1	40
A_3	4	3	2	6	20
Потребность	20	25	35	10	90

Требуется организовать снабжение таким образом, чтобы полностью обеспечить потребителей молоком и чтобы транспортные расходы были минимальными.

Решение

Опорный план получим, например, по правилу «минимального элемента» (таблица 9).

Таблица 9

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	2 + 15	3	5 – 15	4	30	0
A_2	3 – 5	2 25	4 +	1 10	40	1
A_3	4	3	2 20	6	20	–3
b_j	20	25	35	10	90	
v_j	2	1	5	0		

Полученный план невырожденный. Вычисление потенциалов можно производить непосредственно в таблице. Пусть потенциал первого поставщика *$u_1=0$*, тогда остальные потенциалы определятся однозначно.

Проверяем план на оптимальность, находим оценки свободных клеток по формуле:

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0;$$

$$s_{12} = 3 - (0 + 1) = 2 > 0;$$

$$s_{14} = 4 - (0 + 0) = 4 > 0;$$

$$s_{23} = 4 - (1 + 5) = -2 < 0;$$

$$s_{31} = 4 - (-3 + 2) = 5 > 0;$$

$$s_{32} = 3 - (-3 + 1) = 5 > 0;$$

$$s_{34} = 6 - (-3 + 0) = 9 > 0.$$

Клетка (2,3) – перспективная. Строим для неё замкнутый цикл (таблица 9). Загружая эту клетку наименьшим количеством груза, стоящего в отрицательных вершинах цикла, получим новый план (таблица 10).

Таблица 10

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	2 20	3	5 10	4	30	0
A_2	3	2 25	4 5	1 10	40	–1
A_3	4	3	2 20	6	20	–3
b_j	20	25	35	10	90	
v_j	2	3	5	2		

Положим потенциал $u_1=0$, тогда остальные потенциалы определятся однозначно.

Проверяем полученный план на оптимальность:

s_{12}=3-(0+3)=0; s_{31}=4-(-3+2)=5>0;
s_{14}=4-(0+2)=2>0; s_{32}=3-(-3+3)=3>0;
s_{21}=3-(-1+2)=2>0; s_{34}=6-(-3+2)=7>0.

Все оценки $s_{ij}\geq 0$.

Следовательно, полученный план

$$X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 25 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

оптимален.

Транспортные расходы по оптимальному плану

$$f_{min}=2\cdot 20+5\cdot 10+2\cdot 25+4\cdot 5+1\cdot 10+2\cdot 20=210.$$

Замечание. Если среди оценок s_{ij} хотя бы одна равна нулю, то полученный оптимальный план не единственный.

2.3.4 Решение транспортной задачи с открытой моделью

Если суммарная производственная мощность поставщиков превышает спрос потребителей или спрос потребителей больше фактической суммарной мощности поставщиков, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \text{или} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то имеем *транспортную задачу с открытой моделью.*

Если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то в математическую модель транспортной задачи вводится фиктивный *(n+1)*-й пункт потребления. Тогда в матрице задачи добавится столбец, для которого потребность равна разности между суммарной мощностью поставщиков и фактическим спросом потребителей:

$$b_{n+1} = \sum_{i-1}^{m} a_i - \sum_{j-1}^{n} b_j.$$

Все тарифы на доставку груза в пункт B_{n+1} будем считать равными нулю. Очевидно, что для такой транспортной задачи уже окажется выполнимым условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j + b_{n+1}.$$

Для новой задачи значение целевой функции будет таким же, так как цены на дополнительные перевозки равны нулю. Иными словами, введение фиктивного потребителя обеспечивает совместность системы ограничений.

Если же

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то вводится фиктивный $(m+1)$-й пункт отправления, для которого запас груза

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Тарифы на доставку грузов от фиктивного A_{m+1} поставщика полагаем равными нулю. В матрице задачи добавится одна строка, причём на целевой функции это не отразится, а система ограничений станет совместной, т. е. станет возможным отыскание оптимального плана.

3 Задачи для самостоятельной работы

3.1 Предприятие может выпускать продукцию двух видов: *П1* и *П2*. При этом используется два вида ресурсов: P_1 и P_2. По технологическим нормам на производство единицы продукции *П1* требуется a_{11} единиц ресурса P_1 и a_{21} единиц ресурса P_2. На производство единицы продукции *П2* требуется по a_{12} и a_{22} единиц тех же ресурсов. Объем ресурсов P_1 и P_2 составляет соответственно b_1 и b_2 единиц. Прибыль от реализации единиц продукции *П1* и *П2* составляет соответственно по c_1 и c_2 тыс. ден. единиц. Требуется:

1) свести исходные данные в таблицу, удобную для построения модели;

2) составить математическую модель задачи (показатель эффективности – прибыль);

3) определить оптимальный план выпуска количества единиц продукции *П1* и *П2*, обеспечивающий максимальную прибыль. Найти величину полученной прибыли.

Данные для решения задачи 1 приведены в таблице 11.

Таблица 11

Номер варианта	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2	c_1	c_2
1	4	2	1	2	16	10	2	2
2	10	5	2	5	60	20	2	3
3	3	7	9	7	42	84	3	3
4	2	5	7	5	30	55	3	4
5	4	6	11	6	48	90	4	4
6	3	4	9	4	28	52	3	2
7	6	7	12	7	63	105	5	3

8	2	3	6	3	18	30	2	2
9	3	7	10	7	35	84	4	3
10	3	5	6	5	25	40	2	2
11	6	4	2	4	40	24	3	2
12	3	3	9	3	24	42	2	1
13	6	4	2	4	44	28	4	4
14	1	3	7	3	21	39	3	2
15	3	5	9	5	25	55	2	2
16	7	4	3	4	48	32	3	3
17	4	6	8	6	72	96	5	5
18	7	5	3	5	70	50	4	4
19	9	6	4	6	90	60	4	3
20	2	4	7	4	32	52	3	2
21	5	8	11	8	72	120	5	5
22	4	6	10	6	42	78	4	3
23	4	4	8	4	40	56	3	2
24	4	6	11	6	36	78	4	3
25	2	4	8	4	32	56	3	3
26	3	6	10	6	54	96	5	4
27	6	7	9	7	77	112	5	5
28	3	3	11	3	15	39	2	1
29	4	7	9	7	56	91	4	3
30	4	5	11	5	35	70	2	2

3.2 Найти начальный опорный план:

3.2.1 $Z = 2x_1 - x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_4 = 4, \\ 16x_2 + x_3 - 2x_4 = 16, \\ 5x_2 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right);$

3.2.2 $Z = -x_1 + 6x_2 + 2x_4 - x_5 + 2x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_6 = 9, \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right);$

3.2.3 $Z = x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + \quad + 5x_3 + 3x_4 \leq 14, \\ 6x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 17, \\ 2x_3 + 3x_4 \leq 21, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right);$

3.2.4 $Z = x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 2x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_3 + 3x_4 = 24, \\ x_1 + x_4 = 4, \\ x_4 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right);$

3.2.5 $Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 24, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \le 12, \\ 6x_1 + 3x_3 + x_4 \le 35, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right).$$

Ответы: **3.2.1** $(4; 0; 16; 0; 6)$. **3.2.2** $(0; 0; 4; 0; 3; 9)$. **3.2.3** $(0; 0; 0; 0; 14; 17; 21)$. **3.2.4** $(4; 2; 24; 0; 8)$. **3.2.5** $(0; 0; 0; 0; 24; 12; 35)$.

3.3 Решить симплексным методом и дать геометрическую интерпретацию процесса решения:

3.3.1 $\max Z = 3x_1 + 9x_2;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

3.3.2 $\max Z = x_1 + 2x_2;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

3.3.3 $\max Z = 6x_1 + 4x_2;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

3.3.4 $\max Z = 2x_1 + 4x_2;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 20, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

3.3.5 $\max Z = 6x_1 + 4x_2;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

3.3.6 $\max Z = 2x_1 + 6x_2;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

Ответы: **3.3.1** $(0;2;0;0)$. **3.3.2** $(0;4;6;0)$**. 3.3.3** Система ограничений несовместна. **3.3.4** $(4; 8; 0; 0; 4)$.**3.3.5** $(3; 2; 5; 0; 2; 0)$. **3.3.6** $(3/2; 3; 1/2; 0; 0)$.

3.4 Решить симплексным методом:

3.4.1 $Z = 8x_1 + 6x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \\ 6x_1 + 12x_2 + x_4 = 20; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

3.4.2 $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 9; \\ x_1 + x_5 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 8; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,6}).$$

3.4.3 $Z = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

Ответы: **3.4.1** $X^* = (2;\, 5;\, 0;\, 0),\ Z_{\max} = 42.$

3.4.2 $X^* = (3;\, 2;\, 0;\, 0;\, 1;\, 1),\ Z_{\max} = 12.$

3.4.3 $X^* = (2{,}8;\ 2{,}4;\ 0{,}4),\ Z_{\max} = 7{,}2.$

3.5 Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования в симметрической форме:

3.5.1

$$\max \quad Z = 2x_1 + 7x_2 + 5x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 1; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}$$

3.5.2

$$\min \quad f = y_1 + 3y_2 + 5y_3,$$
$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + 2y_3 \ge 4, \\ -y_1 + y_2 - y_3 \ge 7, \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 \ge 3; \\ 3y_1 - 2y_2 + y_3 \ge 9; \end{cases}$$
$$y_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,3}\right).$$

3.5.3

$$\min \quad f = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3,$$
$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 - 3y_3 \ge 1, \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 \ge 6, \\ -y_1 + y_2 + y_3 \ge 3; \\ y_1 + 6y_2 + 4y_3 \ge 5; \end{cases}$$
$$y_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,3}\right).$$

3.5.4

$$\max \quad Z = x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 5x_4,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \le 5, \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \le 7, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, \; i = \overline{1,4}$$

3.6 Построить начальный опорный план (методами «минимального элемента» и «северо-западного угла») перевозок груза от поставщиков A_i к потребителям B_j, если известны: a_i – запас единиц груза i-го поставщика, b_j – потребность j-го потребителя в грузе, (c_{ij}) – матрица затрат на перевозку одной единицы груза. Проверить на оптимальность один из полученных опорных планов.

3.6.1 $a_1 = 140; \quad a_2 = 50; \quad a_3 = 70; \quad a_4 = 90;$

$b_1 = 100; \quad b_2 = 60; \quad b_3 = 80; \quad b_4 = 110;$

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.6.2 $a_1 = 70; \quad a_2 = 140; \quad a_3 = 110;$

$b_1 = 90; \quad b_2 = 80; \quad b_3 = 100; \quad b_4 = 60;$

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.6.3 $a_1 = 75; \quad a_2 = 100; \quad a_3 = 60; \quad a_4 = 125;$

$b_1 = 190; \quad b_2 = 90; \quad b_3 = 70;$

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.7 Решить транспортную задачу, если известны: a_i – запас единиц груза i-го поставщика, b_j – потребность j-го потребителя в грузе, (c_{ij}) – матрица затрат на перевозку одной единицы груза.

3.7.1 $a_1 = 40; \quad a_2 = 120;$

$b_1 = 30; \quad b_2 = 50; \quad b_3 = 45; \quad b_4 = 35;$

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.7.2 $a_1 = 40; \quad a_2 = 36; \quad a_3 = 24;$

$b_1 = 24; \quad b_2 = 20; \quad b_3 = 30; \quad b_4 = 26;$

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 7 \\ 8 & 10 & 14 & 12 \\ 16 & 12 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

3.7.3 $a_1 = 30; \quad a_2 = 50; \quad a_3 = 45;$

$b_1 = 20; \quad b_2 = 25; \quad b_3 = 35; \quad b_4 = 40;$

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 14 & 10 \\ 16 & 20 & 18 & 17 \\ 19 & 21 & 16 & 13 \end{pmatrix}.$$

Ответы: **3.7.1** f_{min}= 745. **3.7.2** f_{min}= 670. **3.7.3** f_{min}= 1810.

Список литературы

1 **Кузнецов, А. В.** Руководство к решению задач по математическому программированию: учеб. пособие / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 2001. – 448 с.

2 **Унсович, А. Н.** Краткий курс высшей математики для экономистов / А. Н. Унсович. – Барановичи: БНИП, 2000. – 531 с.