МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Могилев 2021

УДК 517.5
ББК 22.161.5
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «24» декабря 2020 г., протокол № 4

Составители: Т. Ю. Орлова;
И. У. Примак;
А. А. Романенко

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по изучению темы «Теория функций комплексной переменной», примеры с подробными решениями и задачи для самостоятельной работы, а также домашние задания.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Комплексные числа и действия над ними

1.1 Основные понятия и определения

Расширением и обобщением понятия множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ $\left(\mathbb{R}\subset\mathbb{C}\right)$.

Комплексным числом (КЧ) z называется выражение вида $z=a+ib$, где $a,b\in\mathbb{R}$, $i-$ мнимая единица, которая определяется соотношением

$$i^2=-1.$$

При этом $a=\mathrm{Re}\,z$ – ***действительная часть*** комплексного числа z, а $b=\mathrm{Im}\,z-$ ***мнимая***.

Комплексные числа $z=a+ib$ и $\overline{z}=z^*=a-ib$ – ***комплексно-сопряженные***.

Два комплексных числа $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2$ называются ***равными*** $z_1=z_2$, если равны их действительные и мнимые части, т. е.

$$a_1=a_2,\ b_1=b_2.$$

Если любое действительное число может быть представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут действительная и мнимая части комплексного числа (КЧ). Такую плоскость называют комплексной (КП) (рисунок 1.1).

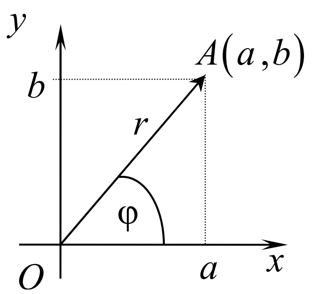

Рисунок 1.1

При этом ось Ox – действительная числовая ось, а ось $Oy-$ мнимая. Каждому КЧ соответствует точка на комплексной плоскости и наоборот. Это соответствие взаимно однозначное.

Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, обозначаемой $z=\infty$, называется ***расширенной комплексной плоскостью***. Действительная и мнимая части бесконечно удаленного комплексного числа не определены, т. е. направление расположения этой точки неопределенно.

1.2 Формы записи комплексного числа

Запись КЧ в виде $z = a + ib$ называют ***алгебраической формой КЧ***.

Из рисунка 1 видно, что КЧ можно задать с помощью радиус-вектора $\overrightarrow{OA}(a, b)$ и угла φ между положительным направлением оси Ox и вектором $\overrightarrow{OA}$. Длину $\overrightarrow{OA}$ называют ***модулем КЧ*** и обозначают $r = |z|$, а величину угла φ – ***аргументом КЧ*** и обозначают $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Величина $\operatorname{Arg} z$ многозначная и определяется с точностью до $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е.

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi .$$

Значение $\arg z -$ главное значение аргумента. Оно заключено в пределах $0 \le \arg z < 2\pi$ или $-\pi < \arg z \le \pi$.

Поскольку $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$, то комплексное число можно представить в следующем виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Правую часть этой формулы называют ***тригонометрической формой записи КЧ***. Модуль и аргумент КЧ определяются по формуле

$$r = |z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} . \tag{1.1}$$

Если принимать, что $-\pi < \arg z = \varphi \le \pi$, то

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(b/a) & \text{– для внутренних точек I, IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg}(b/a) + \pi & \text{– для внутренних точек II четверти,} \\ \operatorname{arctg}(b/a) - \pi & \text{– для внутренних точек III четверти.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ позволяет перейти к компактной, так называемой ***показательной или экспоненциальной, форме записи КЧ***, а именно

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} .$$

Таким образом, запись $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ представляет собой запись одного и того же КЧ, но в различных формах.

1.3 Действия с комплексными числами в алгебраической форме

Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Тогда:

1) $z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$;

2) $z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

В случае комплексно-сопряженных чисел

$$z \cdot z^* = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = \left|z^*\right|^2 .$$

В связи с этим для модуля КЧ можем записать

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 + b^2} \ ;$$

3) $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \dfrac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$.

Примечание – Перемножение и деление комплексных чисел с большим количеством сомножителей, а также возведение в натуральную степень и извлечение корней в алгебраической форме трудоемко.

1.4 Действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Сложение и вычитание в этих формах не принято проводить.

Пусть $z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда:

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$;

2) $z^n = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$, где $n \in \mathbb{N}$. Это выражение называется формулой Муавра;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$;

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, где $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений. Геометрически все значения корней изображаются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом $R = \sqrt[n]{r}$.

Примечание – Действия с КЧ следует проводить в одной форме. При этом сложение и вычитание удобно (легко и просто) проводить в алгебраической форме, а умножать, делить, возводить в натуральную степень и извлекать корни – в тригонометрической и показательной формах.

Пример 1 – Записать комплексное число $z = -2 + 2i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение

Для записи КЧ в тригонометрической и показательной формах $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ необходимо найти модуль и аргумент (главное значение аргумента) КЧ. Находим $r = |z|$ по формуле (1.1):

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Для того чтобы найти $\varphi = \arg z$ по формуле (1.2), определим четверть. Число z расположено во второй четверти, следовательно,

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{-2}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

В результате $z = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Пример 2 – Найти значения кубического корня $\sqrt[3]{-1}$.

Решение

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0, 1, 2$.

При $k = 0$ имеем $z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При $k = 1$ имеем $z_1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$.

При $k = 2$ имеем $z_2 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Корни расположены в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиусом $R = \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{1} = 1$ (рисунок 1.2).

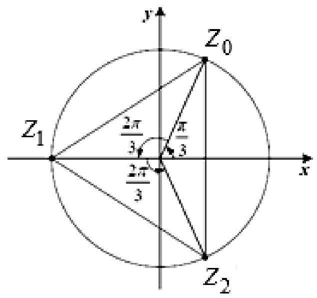

Рисунок 1.2

Пример 3 – Выполнить действия: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $\frac{z_1^2}{z_2}$, если комплексные числа заданы в виде $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

Решение

Запишем КЧ во всех формах и будем брать соответствующую форму для выполнения указанных действий.

$$z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i;$$

$$z_2=-1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{2\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

а) $z_1+z_2=(1+i)+\left(-1+\sqrt{3}i\right)=0+i\left(1+\sqrt{3}\right)=i\left(1+\sqrt{3}\right)$;

б) $z_1-z_2=(1+i)-\left(-1+\sqrt{3}i\right)=2+i\left(1-\sqrt{3}\right)$;

в) для умножения, деления и возведения в натуральную степень воспользуемся тригонометрической формой чисел:

$$\frac{z_1^2}{z_2}=\frac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}{2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}.$$

1.5 Задачи для самостоятельного решения

1 Вычислить: а) i^{48}; б) i^{391}.

2 Выполнить действия, указать действительную и мнимую части комплексного числа:

а) $(1+2i)^2$; б) $\dfrac{2-i}{1+i}$; в) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

3 Представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах и изобразить его на комплексной плоскости:

а) $z=-i$; г) $z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; ж) $z=\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}$;

б) $z=-5$; д) $z=\dfrac{1-i}{1+i}$; з) $z=2\cos\dfrac{7\pi}{4}-2i\sin\dfrac{7\pi}{4}$;

в) $z=1-i\sqrt{3}$; е) $z=-\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$; и) $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}$.

4 Вычислить, используя формулу Муавра:

а) $z=\dfrac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}+(1+i)^{96}}$; б) $\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{100}$.

5 Найти все значения корней из комплексного числа:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt{i}$; в) $\sqrt{-1}$; г) $\sqrt[4]{-1}$; д) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.

6 Решить уравнения:

а) $z^3+8=0$; в) $z^2+2z+5=0$;

б) $z^2-6z+34=0$; г) $z^2+6iz-13=0$.

7 Установить, при каком действительном значении a комплексное число $z=3i^3-2ai^2+(1-a)i+5$ будет:

а) действительным; б) чисто мнимым; в) равным нулю.

8 Вычислить двумя способами $z_1\cdot\overline{z_2}$ и $\left(\overline{z_1}:z_2\right)^2$, если $z_1=1-i\sqrt{3}$, $z_2=\sqrt{3}+i$.

1.6 Домашнее задание

1 Вычислить $i^{17}-5i^{14}+10i^7+9i^5-4$.

2 Выполнить действия: а) z_1+z_2; б) z_1-z_2; в) $\frac{z_1^2}{z_2}$; г) $\overline{z_1}\cdot z_2^2$; д) $\sqrt[3]{z_2}$, если комплексные числа заданы в виде $z_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, $z_2=-\sqrt{3}+i$.

3 Вычислить $(1+i)^{10}$, используя формулу Муавра.

4 Решить уравнения:

а) $z^4+16=0$; б) $4z^2-8z+5=0$.

Ответы к подразд. 1.5

1 а) 1; б) $-i$. **2** а) $-3+4i$; б) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$; в) i. **3** а) $e^{\frac{3\pi}{2}i}$; б) $5e^{\pi i}$; в) $2e^{\frac{5\pi}{3}i}$; г) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$; д) $e^{\frac{3\pi}{2}i}$; е) $e^{\frac{5\pi}{6}i}$; ж) $e^{\frac{\pi}{6}i}$; з) $2e^{\frac{\pi}{4}i}$; и) $2e^{\frac{\pi}{4}i}$. **4** а) -2; б) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **5** а) 1, $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$; в) $\pm i$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$; д) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i$. **6** а) -2, $1\pm\sqrt{3}i$; б) $3\pm5i$; в) $-1\pm2i$; г) $\pm2-3i$. **7** а) -2; б) $-2{,}5$; в) ни при каком. **8** $-4i$, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ответы к подразд. 1.6

1 1. **2** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; в) $-\frac{i}{2}$; г) $-4i$; д) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{18}+i\sin\frac{5\pi}{18}\right)$, $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{18}+i\sin\frac{17\pi}{18}\right)$, $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{18}+i\sin\frac{29\pi}{18}\right)$. **3** $32i$. **4** а) $\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$; б) $1\pm\frac{1}{2}i$.

2 Кривые и области на комплексной плоскости

КЧ используют для задания линий и областей на комплексной плоскости. При этом действительную и мнимую части КЧ будем обозначать соответственно x и y, т. е. писать $z = x + iy$ как текущие координаты точек линий или областей.

Пример 1 – Установить вид линии, задаваемой уравнением $|z| = R$.

Решение

Поскольку $|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$, то из уравнения $|z| = R$ следует $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, т. е. $x^2 + y^2 = R^2$. Следовательно, уравнение $|z| = R$ определяет окружность радиусом R с центром в начале координат. Записав его в параметрической форме $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ и подставив в $z = x + iy = R\cos\varphi + iR\sin\varphi = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) = Re^{i\varphi}$, получили уравнение, которое называют комплексно-параметрическим уравнением окружности, где $R = \text{const}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Пример 2 – Установить вид линии, задаваемой уравнением $|z - z_0| = R$.

Решение

$z = x + iy,\, z_0 = x_0 + iy_0 \Rightarrow z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) \Rightarrow$

$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Имеем уравнение окружности радиусом R с центром в точке z_0. Соответственно, в параметрической форме $x = x_0 + R\cos\varphi$, $y = y_0 + R\sin\varphi$ и в комплексно-параметрической форме $z = x + iy = x_0 + R\cos\varphi + i(y_0 + R\sin\varphi) = z_0 + Re^{i\varphi}$.

Множество точек комплексной плоскости z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, называют δ***-окрестностью*** точки z_0.

Областью на комплексной плоскости называется множество D точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

1) D состоит из одних внутренних точек, т. е. точек с какой-то своей окрестностью (свойство открытости);

2) любые две точки множества можно соединить непрерывной линией так, чтобы все точки этой линии принадлежали самому множеству (свойство связности).

Если область D ограничена некоторой замкнутой линией, точки которой принадлежат D, то эту линию называют границей области, а саму область называют ***замкнутой*** и обозначают $\overline{D}$.

Для областей вводятся понятия односвязной и многосвязной областей. Область D называется ***односвязной***, если она ограничена замкнутой линией G, не пересекающей себя, и ***двусвязной***, если она ограничена двумя замкнутыми линиями G_1 и G_2, которые не пересекаются и каждая не пересекает себя. В частности, внутренняя линия может вырождаться в точку или дугу непрерывной линии. Аналогично определяются многосвязные области. Иными словами, односвязная область – это область без дыр.

Для границ замкнутых областей вводится понятие ориентации границ. За положительное направление обхода области по границе принято считать направление обхода, при котором область остается слева.

2.1 Задачи для самостоятельного решения

Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям, построить его:

1) $\operatorname{Re} z \geq 0$;
2) $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$;
3) $|\operatorname{Im} z| \leq 2$;
4) $|z| < R$;
5) $|z - z_0| \leq R$;
6) $|z| \geq R$;
7) $|z - z_0| \geq R$;
8) $R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$;
9) $\operatorname{Re}(2z+3) - \operatorname{Im}(5-4z) = 1$;
10) $|z-1| = |z-2i|$;
11) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$;
12) $z = \bar{z}$;
13) $1 < |z+2-3i| < 2$;
14) $|z| + \operatorname{Re} z \leq 1$;
15) $|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}$.

2.2 Домашнее задание

Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям, построить его:

1) $|z-i| = |z+2|$; 2) $|z+2i-3| = 4$; 3) $1 < |z+2| \leq 2$; 4) $0 < \arg z \leq \frac{\pi}{4}$.

3 Функции комплексной переменной. Предел и непрерывность

3.1 Основные понятия и определения

Пусть даны два непустых множества D и E, элементами которых являются комплексные числа соответственно $z = x + iy$ и $w = u + iv$, которые изображаются точками на комплексных плоскостях z и w.

Если каждому числу $z \in D$ по некоторому правилу f поставлено в соответствие определенное число $w \in E$, то говорят, что на множестве D определена ***однозначная функция комплексной переменной*** (***ФКП***) z, и записывают $w = f(z)$.

При этом множество D называют ***областью определения*** функции $w = f(z)$, а множество $E -$ ***областью значений***. Говорят также, что точка $w -$ ***образ*** точки z, а точка $z -$ ***прообраз*** точки w.

Если каждому z соответствует несколько значений w, то функция $w=f(z)$ называется ***многозначной***.

Из определения очевиден ***геометрический смысл ФКП***: функция $w=f(z)$ устанавливает соответствие между точками области D комплексной плоскости z и точками области E комплексной плоскости w.

Функцию $w=f(z)$ можно записать в виде

$$w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y),$$

т. е. выделить действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ части, т. е.

$$u(x,y)=\operatorname{Re}f(x+iy), \qquad v(x,y)=\operatorname{Im}f(x+iy).$$

Задание функции комплексной переменной $w=f(z)$ равносильно заданию двух функций двух действительных переменных.

Число w_0 называется ***пределом*** функции $w=f(z)$ в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)>0$, что для всех $z\neq z_0$ из неравенства $|z-z_0|<\delta$ следует неравенство $|f(z)-w_0|<\varepsilon$. Записывают

$$w_0=\lim_{z\to z_0}f(z).$$

При этом способ стремления z к z_0 не важен. Таких способов бесконечно много. Все теоремы о пределах функций действительной переменной остаются в силе и для ФКП.

Функция $w=f(z)$ называется ***непрерывной*** в точке z_0, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и существует предел $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$, равный значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0).$$

Из непрерывности $f(z)$ следует непрерывность ее действительной $u(x,y)=\operatorname{Re}f(x+iy)$ и мнимой $v(x,y)=\operatorname{Im}f(x+iy)$ частей. Верно и обратное. По аналогии с функцией одной действительной переменной доказывается, что ***все элементарные ФКП непрерывны в своих естественных областях определения***.

Пример 1 – Выделить действительную и мнимую части ФКП $w=z^2+iz$.

Решение

$$z=x+iy\Rightarrow w=(x+iy)^2+i(x+iy)=(x^2-y^2-y)+i(2xy+x).$$

Получим $\operatorname{Re}w=u=x^2-y^2-y$, $\operatorname{Im}w=v=2xy+x$.

Пример 2 – Исследовать на непрерывность ФКП $w=z^2\operatorname{Re}\overline{z}-i\operatorname{Im}(z^2)$.

Решение

$z = x + iy \Rightarrow w = (x+iy)^2\ \mathrm{Re}(x-iy) - i\,\mathrm{Im}(x+iy)^2 = (x^2 - y^2 + 2ixy)x - 2ixy =$ $= (x^3 - xy^2) + i(2x^2y - 2xy)$. Функции $u = x^3 - x^2 y$, $v = 2x^2 y - 2xy$ определены и непрерывны для всех $x, y \in \mathbb{R}$, следовательно, w непрерывна на $\mathbb{C}$.

Поскольку функция $w = f(z)$ устанавливает соответствие между точками области D комплексной плоскости z и точками области E комплексной плоскости w, а линии или области плоскости z представляют собой множество точек, то, очевидно, эти линии или области должны отображаться в некоторые линии или области плоскости w.

Для нахождения образов линий плоскости z при отображении $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ необходимо в системе $\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y) \end{cases}$ исключить переменные x, y и найти функциональную связь переменных u и v на плоскости w, т. е. $F(u,v) = 0$. При этом способ исключения x и y зависит от способа задания линий на плоскости z. Подробности на примерах при отображении $w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$ окружности радиусом R с центром в начале координат плоскости z.

Пример 3 – Пусть окружность на плоскости z задана уравнением $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение

Имеем уравнение окружности в неявном виде. Запишем его в явном виде: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Поскольку $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy, \end{cases}$, то $\begin{cases} u = x^2 - \cancel{R^2 + x^2} = 2x^2 - R^2 \\ v = \pm 2x\sqrt{R^2 - x^2}. \end{cases}$, Исключим x. Получим $v = \pm\sqrt{R^4 - u^2}$, или $u^2 + v^2 = (R^2)^2$.

Таким образом, окружность $x^2 + y^2 = R^2$ радиусом R с центром в начале координат плоскости z отображается в окружность $u^2 + v^2 = (R^2)^2$ радиусом R^2 с центром в начале координат плоскости w.

Пример 4 – Пусть окружность задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ x = R\sin\varphi. \end{cases} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Решение

Подставляем выражения для x и y в систему $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy. \end{cases}$,

Получаем $\begin{cases} u = R^2 \cos 2\varphi, \\ v = R^2 \sin 2\varphi. \end{cases}$ Исключаем φ и имеем уравнение $u^2 + v^2 = (R^2)^2$.

Пример 5 – Пусть окружность задана в комплексно-параметрической форме $z = \mathrm{Re}^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Решение

В данном случае $w = z^2 = R^2 e^{2i\varphi}$, т. е. имеем уравнение окружности радиусом R^2, но в комплексно-параметрической форме, из которой легко получить $u^2 + v^2 = \left(R^2\right)^2$.

Заметим также, что использование комплексно-параметрической формы кривой существенно упрощает выкладки.

Из приведенных примеров можно сделать вывод, что на самом деле окружность плоскости z отображается в двойную окружность радиусом R^2 плоскости w, т. е. полуокружности $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ отображаются в окружности $u^2 + v^2 = \left(R^2\right)^2$.

Рассмотрим отображение прямых линий плоскости z при отображении $w = z^2$.

Пример 6 – Пусть $z = x + i0$, т. е. $z = x$, $y = 0$ – действительная ось плоскости z.

Решение

Проще всего это сделать непосредственно $w = (x + i0)^2 = x^2 + i0 = u + i0$. Получим, что действительная ось плоскости z отображается в положительную действительную полуось плоскости w, т. е. $u = x^2 \ge 0$, $v = 0$.

Пример 7 – Пусть $y = x$, т. е. имеем биссектрису первой и третьей координатных четвертей. В комплексной форме $z = x + iy = x + ix$.

Решение

$w = (x + iy)^2 = (x + ix)^2 = i2x^2 = 0 + iv$, где $u = 0$, $v = 2x^2 \ge 0$, т. е. прямая $y = x$ плоскости z отображается в положительную мнимую полуось плоскости w.

Пример 8 – Пусть $z = \pm a + iy$ $(a \ge 0)$– прямые, параллельные Oy.

Решение

Имеем $z = \pm a + iy$ $(a \ge 0)$, т. е. $x = \pm a$, $y-$текущая. Получаем $\begin{cases} u = a^2 - y^2, \\ v = \pm 2ay. \end{cases}$ Исключаем y. В результате $u = a^2 - \dfrac{1}{4a^2}v^2$, т. е. прямые $z = \pm a + iy$ отображаются в параболу.

Для нахождения образов областей плоскости z при отображении $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ необходимо найти образ границы или образы границ этой области, а затем определить искомую область плоскости w.

3.2 Задачи для самостоятельного решения

Найти образы линий и областей плоскости z при отображении $w=z^2$, если:

1) $z=0+iy$, т. е. $z=iy$, $x=0$ – мнимая ось плоскости z;

2) $y=-x$ – биссектриса второй и четвертой четвертей;

3) $z=x\pm ib$ $(b\geq 0)$ – прямые, параллельные действительной оси;

4) область $z=x+iy$, $xy\geq 0$ – первая и третья координатные четверти;

5) область $z=x+iy$, $xy\leq 0$ – вторая и четвертая координатные четверти;

6) область, ограниченная линиями $z=x+ib$, $b>0$; $z=a+iy$, $a>0$; $x=0$, $y=0$;

7) область, ограниченная линиями $z=x+ib$, $b>0$; $z=a+iy$, $a<0$; $x=0$, $y=0$.

4 Основные элементарные функции комплексной переменной

4.1 Основные понятия и определения

Некоторые из ФКП введем путем формальной замены действительного аргумента x на комплексный $z=x+iy$, т. е. $f(x)\to f(z)$. Свойства функций $f(z)$ могут сохранять некоторые свойства функций действительной переменной, а при $z=x$ должны полностью совпадать. При этом могут возникать другие свойства $f(z)$, аналога которым нет в действительной области.

Степенная функция $w=z^n=(x+iy)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^n e^{in\varphi}$, где $n\in\mathbb{N}$. Функция определена на всей плоскости z и является однозначной. Если $n=\dfrac{1}{q}$, где $q\in\mathbb{N}$, то

$$w=z^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{z}=\sqrt[q]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[q]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{q}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{q}\right),$$

где $k=0,1,2,...,q-1$. Функция является q-значной.

Экспонента $w=e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cos y+ie^x\sin y$, т. к. $e^{iy}=\cos y+i\sin y$ – формула Эйлера.

Функция определена на всей плоскости z и является периодической с мнимым периодом $T=2\pi i$, поскольку

$$w=e^z=e^{z+2k\pi i}=e^{x+i(y+2k\pi)}=e^x e^{i(y+2k\pi)}=e^x\left(\cos(y+2k\pi)+i\sin(y+2k\pi)\right).$$

Все свойства те же, что и для $z = x$, а именно:

1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; 2) $\left(e^{z}\right)^{n} = e^{nz}$; 3) $e^{z} \neq 0$ и т. д.

Однако e^{z} не всегда больше нуля. В частности, $e^{\pi i} = -1 < 0$.

Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z|e^{i(\varphi+2k\pi)} = \operatorname{Ln}|z| + \operatorname{Ln} e^{i(\varphi+2k\pi)} =$ $= \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Функция является многозначной. При $k = 0$ получаем однозначную функцию

$$w = \ln z = \ln|z|e^{i\varphi} = \ln|z| + i\varphi,$$

которую называют ***главным*** значением логарифма $\operatorname{Ln} z$.

Все свойства те же, что и для $z = x$, а именно:

1) $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$; 2) $\operatorname{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$; 3) $\operatorname{Ln} z^{n} = n \operatorname{Ln} z$ и т. д.

Функция определена на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z = 0$.

Тригонометрические функции определяются формулами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Они сохраняют многие свойства тригонометрических функций действительной переменной. В частности, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\sin 2z = 2\sin z \cos z$, $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$, $\cos iz = \operatorname{ch} z$, $\sin iz = i \operatorname{sh} z$.

Отметим, что функции $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены. Например, $\cos(0 + 3i) = \dfrac{e^{-3} + e^{3}}{2} > 10$.

Гиперболические функции определяются формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ определены на всей комплексной плоскости и являются периодическими с периодом $2\pi i$, а функции $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ – на всей комплексной плоскости, за исключением точек, где знаменатели обращаются в нуль и имеют период πi. Гиперболические функции связаны с тригонометрическими. Это можно увидеть, выполнив замену z на iz. Действительно, $\operatorname{sh} iz = i \sin z$; $\operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z$; $\operatorname{ch} iz = \cos z$; $\operatorname{cth} iz = -i \operatorname{ctg} z$.

Гиперболические функции связаны формулами, подобными тригонометрическим:

$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$, $\quad \operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$,

$\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z$, $\quad \operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$,

$$\operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{ch} z \cdot \operatorname{sh} z, \qquad \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z.$$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции определяются формулами

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \quad w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$w = \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i-z}{i+z}, \quad z \neq \pm i, \quad w = \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}, \quad z \neq \pm i,$$

$$w = \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right), \qquad w = \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$w = \operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}, \quad z \neq \pm 1, \qquad w = \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}, \quad z \neq \pm 1.$$

Все эти функции бесконечнозначные.

Пример 1 – Вычислить $\operatorname{Ln}(-2)$.

Решение

$$\operatorname{Ln}(-2) = \ln|-2| + i\pi = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi) = \ln 2 + i(1+2k)\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2 – Вычислить i^i.

Решение

$$i^i = e^{iLni} = e^{i\left(\ln|i| + i\cdot\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\right)} = e^{i\left(0 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3 – Вычислить значения $f(z) = P_3(z) = z^3 - 2z^2 + 5z$ в точках $z_1 = i$, $z_2 = 1 - i$.

Решение

$$f(z_1) = P_3(z_1) = z_1^3 - 2z_1^2 + 5z_1 = i^3 - 2i^2 + 5i = -i + 2 + 5i = 2 + 4i;$$

$$f(z_2) = P_3(z_2) = z_2^3 - 2z_2^2 + 5z_2 = (1-i)^3 - 2(1-i)^2 + 5(1-i) = -1 - 3i.$$

Пример 4 – Вычислить $e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Решение

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i = i.$$

Пример 5 – Вычислить $\sin i$.

Решение

$$\sin i = \frac{e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = i\frac{e^{1} - e^{-1}}{2} = i\operatorname{sh} 1.$$

Пример 6 – Выделить действительную и мнимую части функции $f(z)=\sin z$.

Решение

$$f(z)=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}=\frac{e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}}{2i}=$$

$$=\frac{(\cos x+i\sin x)e^{-y}-(\cos x-i\sin x)e^{y}}{2i}=\frac{\left(e^{-y}-e^{y}\right)\cos x+i\left(e^{-y}+e^{y}\right)\sin x}{2i}=$$

$$=\frac{\left(e^{-y}-e^{y}\right)}{2i}\cos x+\frac{i\left(e^{-y}+e^{y}\right)}{2i}\sin x=\cos x\frac{-\left(e^{y}-e^{-y}\right)}{2i}+\frac{i\left(e^{-y}+e^{y}\right)}{2i}\sin x=$$

$$=\frac{i\left(e^{y}-e^{-y}\right)}{2}\cos x+\frac{\left(e^{y}+e^{-y}\right)}{2}\sin x=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y.$$

4.2 Задачи для самостоятельного решения

1 Вычислить:

а) $\ln(-1)$; в) $\sin(1+i)$; д) $\operatorname{sh}(i-2)$; ж) $(1+i)^{i}$;

б) $\ln(2i)$; г) $\operatorname{Ln}(-1)$; е) $(-1)^{i}$; з) $\operatorname{Arcsin} i$.

2 Доказать:

а) $\sin iz=i\operatorname{sh} z$; в) $\operatorname{tg}iz=i\operatorname{th}z$; д) $\cos^2 z+\sin^2 z=1$;

б) $\cos iz=\operatorname{ch}z$; г) $\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1$; е) $\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z$.

3 Выделить действительную и мнимую части следующих функций:

а) $w=ze^{z}$; б) $w=\operatorname{sh} z$.

4.3 Домашнее задание

1 Вычислить:

а) $\operatorname{ch}(2-3i)$; в) $\operatorname{ch} i$; д) $\operatorname{Ln}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; ж) $(-1)^{\sqrt{2}}$;

б) $\cos(1+i)$; г) $\ln i$; е) 2^{i}; з) $\operatorname{Arccos} 2$.

2 Доказать:

а) $\operatorname{ctg}iz=-i\operatorname{cth}z$; б) $\operatorname{ch}2z=\operatorname{ch}^2 z+\operatorname{sh}^2 z$.

3 Выделить действительную и мнимую части следующих функций:

а) $w=\cos z$; б) $w=\operatorname{ch} z$.

Ответы к подразд. 4.2

1 а) πi; б) $\ln 2+i\dfrac{\pi}{2}$; в) $\sin 1\cdot\operatorname{ch}1+i\operatorname{sh}1\cdot\cos 1$; г) $(2k+1)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$; д) $-\cos 1\operatorname{sh}2+i\sin 1\operatorname{ch}2$; е) $e^{-\pi(1+2k)}$, $k\in\mathbb{Z}$; ж) $e^{-\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)}\left(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2}\right)$,

$k \in \mathbb{Z}$; з) $2k\pi - i\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **3** а) $\mathrm{Re}\left(ze^{z}\right) = e^{x}\left(x\cos y - y\sin y\right)$, $\mathrm{Im}\left(ze^{z}\right) = e^{x}\left(x\sin y + y\cos y\right)$; б) $\mathrm{Re}(\mathrm{sh}\, z) = \cos y\,\mathrm{sh}\, x$, $\mathrm{Im}(\mathrm{sh}\, z) = \sin y\,\mathrm{ch}\, x$.

Ответы к подразд. 4.3

1 а) $\cos 3\,\mathrm{ch}\, 2 - i\sin 3\,\mathrm{sh}\, 2$; б) $\cos 1\,\mathrm{ch}\, 1 - i\sin 1\,\mathrm{sh}\, 1$; в) $\cos 1$; г) $\frac{\pi}{2}i$;
д) $\left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$; е) $e^{-2\pi k}\left(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
ж) $e^{\pi\sqrt{2}i(1+2k)} = \cos\left(\pi\sqrt{2}(1+2k)\right) + i\sin\left(\pi\sqrt{2}(1+2k)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
з) $-i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **3** а) $\mathrm{Re}(\cos z) = \cos x\,\mathrm{ch}\, y$, $\mathrm{Im}(\cos z) = -\sin x\,\mathrm{sh}\, y$;
б) $\mathrm{Re}(\mathrm{ch}\, z) = \cos y\,\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{Im}(\mathrm{ch}\, z) = \sin y\,\mathrm{sh}\, x$.

5 Дифференцирование функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Аналитические функции и их некоторые свойства

5.1 Основные понятия и определения

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой точке z_0 и ее окрестности. Если существует предел отношения приращения функции $\Delta w = f(z) - f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ к приращению аргумента $\Delta z = z - z_0$ при $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$ (т. е. $z \to z_0$) и этот предел не зависит от способа стремления $z \to z_0$, то его называют производной функции в точке z_0, т. е.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

а функцию $w = f(z)$ – дифференцируемой в точке z_0.

Теорема. Если функция $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, причем в этой точке действительные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы, то для дифференцируемости $w = f(z)$ в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти равенства (условия) называются условиями ***Коши-Римана.*** Из независимости от способа стремления $z \to z_0$ следует, что производную можно находить по одной из формул, а именно:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{или} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Однозначная функция $w = f(z)$ называется ***аналитической (регулярной, голоморфной) в точке*** z_0, если она дифференцируема в ней и некоторой окрестности этой точки.

Функция $w = f(z)$ называется ***аналитической в области*** D, если она аналитическая в каждой точке этой области.

Функция $w = f(z)$ ***целая***, если она аналитична на $\mathbb{C}$.

Дифференциалом dw аналитической функции $w = f(z)$ в точке z называется главная часть ее приращения, т. е. $dw = f'(z)dz$, где $dz = \Delta z -$ приращение аргумента.

Некоторые свойства аналитических функций:

1) если функция аналитична в области, то она непрерывна в ней;

2) если условия Коши–Римана выполнены, то функцию можно дифференцировать по переменной z, используя таблицу производных и правила дифференцирования функции одной действительной переменной.

Пример 1 – Исследовать $f(z) = z \cdot \operatorname{Im} z$ на дифференцируемость.

Решение

$$z = x + iy \Rightarrow f(z) = (x + iy) \cdot y = xy + iy^2 \Rightarrow u = xy; \quad v = y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y.$$

Имеем $\begin{cases} y = 2y, \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases}$ Значит, $f(z)$ дифференцируема в единственной точке $(0;0)$, т. е. $z_0 = 0$. Следовательно,

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0;0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0;0) = 0 + i\,0 = 0.$$

Пример 2 – Исследовать $f(z) = z^2 + z - 1$ на дифференцируемость.

Решение

$$w = (x + iy)^2 + x + iy - 1 \Rightarrow u = x^2 - y^2 + x - 1; \; v = 2xy + y \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1.$$

Имеем $\begin{cases} 2x+1=2x+1, \\ 2y=-(-2y). \end{cases}$ Значит, $f(z)$ дифференцируема в любой точке $z_0 \in \mathbb{C}$. Следовательно,

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+1+i\,2y=2(x+iy)+1=2z+1.$$

Пример 3 **–** Исследовать $f(z)=\dfrac{1}{z}$ на дифференцируемость.

Решение

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Здесь $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Условия Коши–Римана выполнены во всех точках комплексной плоскости, за исключением точки $x=y=0$, т. е. $z=0$, где частные производные не существуют. Следовательно, функция неаналитична только в точке $z=0$. Найдем $f'(z)$ по вышеприведенным формулам:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2+i\,2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-(x-iy)^2}{\left((x+iy)(x-iy)\right)^2}=\frac{-1}{(x+iy)^2}=-\frac{1}{z^2}$$

Традиционно $f'(z)=\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$.

Примечание – Функция не является аналитической в точках, где она не определена.

5.2 Гармонические функции

Функция $\varphi(x,y)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$, называется ***гармонической***.

Для аналитической в области D функции $w=u+iv$ ее действительная и мнимая части являются гармоническими функциями. Данное свойство аналитических функций позволяет восстанавливать аналитическую функцию, если известна одна из ее частей.

Пусть, например, $u(x,y)$ – действительная часть некоторой аналитической функции $f(z)$ в области D. Тогда для мнимой части $v(x,y)$ на основании определения полного дифференциала функции двух переменных можем записать $dv = v'_x\,dx + v'_y\,dy$. Используя условия Коши–Римана, получаем

$$dv = -u'_y\,dx + u'_x\,dy.$$

Соответственно,

$$v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dv = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u'_y\,dx + u'_x\,dy.$$

Если известна $v(x,y)$ – мнимая часть аналитической функции $f(z)$ в области D, то, поступая аналогично, получаем

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} du = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v'_y\,dx - v'_x\,dy. \tag{5.1}$$

Здесь (x_0, y_0) – некоторая произвольная фиксированная точка в области D, рассматриваемой как область определения действительных функций двух переменных $u(x,y)$ или $v(x,y)$, а путь интегрирования целиком лежит в области D.

Пример 4 **–** Восстановить аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть $v(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + x$.

Решение

Так как $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 4 - 4 = 0$, то $v(x,y)$ – гармоническая на всей плоскости. Следовательно, по формуле (5.1) имеем

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v'_y\,dx - v'_x\,dy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (-4y)dx - (4x+1)dy.$$

В качестве пути интегрирования берем ломаную со звеньями, параллельными осям координат:

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (-4y)dx - (4x+1)dy = \int\limits_{x_0}^{x} (-4y_0)dx - \int\limits_{y_0}^{y} (4x+1)dy =$$
$$= (-4y_0)(x - x_0) - (4x+1)(y - y_0) = -4xy - y + y_0 - 4x_0 y_0.$$

Получаем $u(x,y) = -4xy - y + C$, где $C = y_0 - 4x_0 y_0$. Следовательно,

$$f(z) = -4xy - y + C + i\left(2x^2 - 2y^2 + x\right) = 2i\left(x^2 + 2ixy - y^2\right) + i(x+iy) + C =$$
$$= 2iz^2 + iz + C.$$

Для перехода к комплексной переменной z воспользовались заменой:

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2},\ y = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

5.3 Задачи для самостоятельного решения

1 Проверить выполнение условий Коши–Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z-z_0}$;

б) $f(z)=e^{3z}$;

в) $f(z)=\cos z$;

г) $f(z)=z^2+2z-3$;

д) $f(z)=z+\operatorname{Im} z$;

е) $f(z)=(\overline{z})^2$;

ж) $f(z)=\dfrac{1}{\overline{z}}$;

з) $w(x,y)=2xy-i(x^2-y^2)$;

и) $f(z)=\operatorname{Re}(z^2)$;

к) $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2$;

л) $f(z)=\overline{z}+z^2$;

м) $w(x,y)=x^2+2iy$.

2 Восстановить, если это возможно, аналитические функции $f(z)$ по заданной действительной или мнимой части:

а) $u(x,y)=x^2-y^2-1$;

б) $v(x,y)=x^3-3xy^2+2$;

в) $u(x,y)=xe^x\cos y-ye^x\sin y$;

г) $v(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

д) $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2y$;

е) $v(x,y)=2e^x\sin y$.

5.4 Домашнее задание

1 Проверить выполнение условий Коши–Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

а) $f(z)=z\cdot\overline{z}-z\cdot\operatorname{Im} z$; б) $f(z)=2z^2-3iz$.

2 Восстановить, если это возможно, аналитические функции $f(z)$ по заданной действительной или мнимой части:

а) $u(x,y)=-y(4x+1)$; б) $v(x,y)=y-e^{2x}\sin 2y$.

Ответы к подразд. 5.3

1 а) не дифференцируема в $z=z_0$; б) $3e^{3z}$; в) $-\sin z$; г) $2z+2$; д) не дифференцируема; е) $f'(0)=0$; ж) не дифференцируема; з) $-2iz$; и) $f'(0)=0$; к) $f'(iy)=0$; л) не дифференцируема; м) $f'(1+iy)=2$.
2 а) $v(x,y)=2xy+C$; $f(z)=z^2-1+iC$; б) $u(x,y)=y^3-3x^2y+C$; $f(z)=iz^3+C$; в) $v(x,y)=xe^x\sin y+e^x y\cos y+C$; $f(z)=ze^z+iC$; г) $u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$; $f(z)=\ln z+C$; д) $v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}+2x+C$;

$f(z)=\frac{1}{z}+2iz+Ci$; е) $u(x,y)=2e^{x}\cos y+C$; $f(z)=2e^{z}+C$.

Ответы к подразд. 5.4

1 а) $f'(0)=0$; б) $4z-3i$. **2** а) $v(x,y)=2x^{2}+x-2y^{2}+C$; $f(z)=2iz^{2}+iz+C$; б) $u(x,y)=x-e^{2x}\cos 2y+C$; $f(z)=z-e^{2z}+C$.

6 Интегрирование функции комплексной переменной

6.1 Основные понятия и определения

Пусть L – дуга направленной кусочно-гладкой кривой на плоскости z. Вдоль нее определена непрерывная функция $f(z)$. Точками $z_k\in L$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$ произвольным образом разобьем дугу L на n частичных дуг. На каждой из элементарных дуг произвольным образом выберем по одной точке C_k, $k=1,\ \ldots,$ n, вычислим значение функции в них $f(C_k)$ и составим сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k$, которую называют интегральной, где $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$.

Если существует конечный предел интегральной суммы при стремлении наибольшей из длин элементарных дуг к нулю, когда $n\to\infty$, не зависящий ни от способа разбиения дуги L на частичные дуги, ни от выбора точек C_k в них, то его называют ***интегралом по кривой*** (по контуру) L от функции $f(z)$ и обозначают $\int\limits_L f(z)dz$, т. е.

$$\int\limits_L f(z)dz=\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k .$$

Поскольку $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, а $dz=dx+idy$, то, выделяя $\mathrm{Re}\int\limits_L f(z)dz$ и $\mathrm{Im}\int\limits_L f(z)dz$, можем записать

$$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_L\big(u(x,y)+iv(x,y)\big)(dx+idy)=$$
$$=\int\limits_L u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int\limits_L v(x,y)dx+u(x,y)dy. \qquad (6.1)$$

Как видно, имеем два криволинейных интеграла 2-го рода (Кри-2).

Условия существования, свойства и вычисление. Интеграл $\int\limits_L f(z)dz$ существует, если существуют соответствующие криволинейные интегралы (6.1), а его свойства и методы вычисления аналогичны свойствам и методам вычисления Кри-2.

Пример 1 – Вычислить интеграл $\int\limits_L \bar{z}\,\mathrm{Re}\,z dz$, $L-$ отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=-2-i$ и $z_2=1+2i$.

Решение

$$\bar{z}\,\mathrm{Re}\,z=(x-iy)\mathrm{Re}(x+iy)=x^2-ixy\Rightarrow u=x^2\ ,v=-xy.$$

$$L:\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-2}{-1-2}\Rightarrow y=x+1;\quad dy=dx;\quad x_1=-2,\quad x_2=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\limits_L \bar{z}\,\mathrm{Re}\,z dz=\int\limits_L x^2dx+xydy+i\int\limits_L(-xy)dx+x^2dy=\int\limits_{-2}^{1}\left(x^2+x(x+1)\right)dx+$$

$$+i\int\limits_{-2}^{1}\left(-x(x+1)+(x+1)^2\right)dx=\frac{9}{2}+i\frac{3}{2}.$$

В теории ФКП доказаны теоремы, которые позволяют непосредственно вычислять интегралы по переменной z, не выделяя действительную и мнимую части.

Теорема Коши для односвязной области. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, ограниченной контуром Γ, то интеграл от нее по любому замкнутому контуру γ, лежащему в этой области, равен нулю:

$$\oint\limits_\gamma f(z)dz=0\quad\text{или}\quad\oint\limits_\Gamma f(z)dz=0.$$

При этом контуры γ и Γ могут быть кусочно-гладкими. Такие интегралы называют контурными, а направление обхода берут по контуру положительное. Теорема Коши допускает распространение на многосвязные области.

Следствие из теоремы Коши. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, то значение интеграла от нее не зависит от формы пути интегрирования, а зависит лишь от начальной z_1 и конечной z_2 точек пути интегрирования и записывают

$$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_{z_1}^{z_2}f(z)dz.$$

Теорема Коши для аналитических функций и ее следствие позволяют обосновать основные положения интегрального исчисления аналитических функций, аналогичные функциям действительной переменной.

1 Если $f(z)$ аналитическая, то $\int\limits_{z_1}^{z_2}f(z)dz=F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}=F(z_2)-F(z_1)$, где $F'(z)=f(z)$, т. е. $F(z)$ – одна из первообразных для $f(z)$.

2 Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны вдоль $L\in D$, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\varphi'(z)dz = f(z)\varphi(z)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} f'(z)\varphi(z)dz\,.$$

3 Справедлива также формула замены переменной.

Пример 2 **–** Вычислить интеграл $\int\limits_L \cos z dz$, $L-$ линия, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = i$.

Решение

$$f(z) = \cos z - \text{ аналитическая (целая) ФКП } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_L \cos z dz = \int\limits_0^i \cos z dz = \sin z\Big|_0^i = \sin i = i\,\mathrm{sh}1\,.$$

При интегрировании ФКП часто приходится иметь дело с интегрированием по замкнутым контурам, от формы которых не зависит значение интеграла. Поэтому в качестве таких контуров удобно брать окружность и пользоваться ее комплексно-параметрическим уравнением.

Пусть требуется вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-z_0|=R} f(z)dz$, где контуром интегрирования является окружность радиусом R с центром в точке z_0. Записав уравнение окружности $|z - z_0| = R$ в комплексно-параметрической форме $z - z_0 = Re^{i\varphi}$ и используя подстановку $z = z_0 + Re^{i\varphi}$, $dz = d\left(z_0 + Re^{i\varphi}\right) = iRe^{i\varphi}d\varphi$ $\left(R = \mathrm{const},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right)$, получаем

$$\oint\limits_L f(z)dz = \begin{vmatrix} z = z_0 + Re^{i\varphi} \\ dz = iRe^{i\varphi}d\varphi \end{vmatrix} = iR\int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\varphi}\right)e^{i\varphi}d\varphi\,.$$

Пример 3 **–** Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-z_0|=R} \dfrac{dz}{z - z_0}$.

Решение

$$\oint\limits_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0} = \begin{bmatrix} z = z_0 + Re^{i\varphi}\ ; \\ dz = iRe^{i\varphi}d\varphi \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi}d\varphi}{Re^{i\varphi}} = i\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i\,.$$

Пример 4 **–** Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^n\, dz$, $n \neq -1$.

Решение

$$\oint\limits_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^n\, dz = \left[\begin{matrix} z = z_0 + \rho e^{i\varphi}; \\ dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi \end{matrix}\right] = \int\limits_0^{2\pi} \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n \cdot i\rho e^{i\varphi} dt = i\rho^{n+1} \cdot \left.\frac{e^{i\varphi(n+1)}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\left(e^{2\pi i(n+1)} - 1\right) = \left[e^{2\pi k i} = 1\right] = 0.$$

Таким образом,

$$\oint\limits_L (z-z_0)^n\, dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1; \\ 0, & n = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \end{cases}$$

Интегральная формула Коши. Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой односвязной области D, ограниченной кусочно-гладким контуром L, то справедлива формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

где $z_0 \in D$, а обход осуществляется в положительном направлении.

Эту формулу называют интегральной формулой Коши, а правую часть – интегралом Коши. Она дает возможность находить значения функции в точке $z_0 \in D$ через значение интеграла по контуру, который окружает точку z_0.

Теорема-следствие. Для всякой дифференцируемой в точке z_0 функции $f(z)$ существуют производные всех порядков, причем n-я производная имеет вид:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

где $z_0 \in D$, $L \in D$, а обход осуществляется в положительном направлении.

Интегральные формулы Коши для функции и ее производных позволяют находить интегралы вида

$$\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0), & z_0 - \text{внутри } L, \\ 0, & z_0 - \text{вне } L; \end{cases} \tag{6.2}$$

$$\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}, & z_0 - \text{внутри } L, \\ 0, & z_0 - \text{вне } L, \end{cases} \tag{6.3}$$

не находя первообразных, а преобразуя подынтегральную функцию, выделяя в ней конструкции, как в вышеприведенных формулах.

Пример 5 **–** Вычислить интеграл $\oint\limits_L \frac{1}{z^2+4}dz$, если L: 1) $|z|=1$; 2) $|z-i|=2$; 3) $|z+i|=2$; 4) $|z|=3$.

Решение

$z=2i$ и $z=-2i$ – точки, в которых подынтегральная функция неаналитична. Тогда:

1) внутри контура $|z|=1$ подынтегральная функция аналитична. Следовательно,

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4}dz=0;$$

2) внутри контура $|z-i|=2$ находится точка $z_0=2i$. Следовательно, согласно (6.2), можно записать

$$\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+4}dz=\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{1}{(z_0-2i)(z+2i)}dz=\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{\frac{1}{z+2i}}{z_0-2i}dz=\left(f(z)=\frac{1}{z+2i}\right)=$$

$$=2\pi i\frac{1}{z_0+2i}=2\pi i\frac{1}{2i+2i}=\frac{\pi}{2};$$

3) внутри контура $|z+i|=2$ находится точка $z_0=-2i$. Следовательно, согласно (6.2), можно записать

$$\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+4}dz=\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{1}{(z-2i)(z_0+2i)}dz=\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{\frac{1}{z-2i}}{z_0+2i}dz=\left(f(z)=\frac{1}{z-2i}\right)=$$

$$=2\pi i\frac{1}{z_0-2i}=2\pi i\frac{1}{-2i-2i}=-\frac{\pi}{2};$$

4) внутри контура $|z|=3$ находятся точки $z_1=2i$ и $z_2=-2i$. Для приведения интеграла к виду (6.2) представим дробь в виде суммы простейших

$$\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{(z-2i)(z+2i)}=\frac{1}{4i}\frac{1}{z-2i}-\frac{1}{4i}\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{4i}\left(\frac{1}{z-2i}-\frac{1}{z+2i}\right).$$

Тогда

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{1}{z^2+4}dz=\frac{1}{4i}\oint\limits_{|z|=3}\left(\frac{1}{z_1-2i}-\frac{1}{z_2+2i}\right)dz=\frac{1}{4i}2\pi i(1-1)=0.$$

Пример 6 **–** Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$.

Решение

Внутри круга и на его границе $|z|=1$ функция $f(z)=\cos z$ аналитична. Поэтому, согласно формуле (6.3), можно записать

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z-0)^{2+1}} dz = \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0} = \pi i(-\cos z)\Big|_{z=0} = -\pi i .$$

6.2 Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы от ФКП:

а) $\int\limits_L z \cdot \operatorname{Im} z dz$, $L-$отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1+i$;

б) $\int\limits_L (2z + 3\bar{z}) dz$, $L-$ верхняя полуокружность $|z-2|=3$ от $z_1 = 5$ до $z_2 = -1$;

в) $\int\limits_L (z-1)\cdot \cos z dz$, $L-$линия, соединяющая $z_1 = -\frac{\pi}{2}$, $z_2 = \frac{\pi}{2}$;

г) $\int\limits_L (2 - 3z + z^2) dz$, $L-$ дуга параболы $x = y^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 4+2i$;

д) $\oint\limits_L \frac{\sin z}{z^2+4} dz$, $L-$окружность $x^2 + y^2 + 6y = 0$;

е) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z-\pi} dz$;

ж) $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{2z - e^z}{z^2(z-3)} dz$;

з) $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{z^2-1}{(z+1)^3(z-2)} dz$;

и) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1-\cos 2z}{z^3} dz$;

к) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{1}{(25z^2+1)^4} dz$;

л) $\oint\limits_{|z-2i|=1} \frac{e^z}{z(z-2i)} dz$;

м) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz$.

6.3 Домашнее задание

Найти интегралы от ФКП:

а) $\int\limits_L \operatorname{Re} z dz$, $L-$дуга параболы $y = 2x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1+2i$;

б) $\int\limits_L z e^z dz$, $L-$ линия, соединяющая точки $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{\pi i}{2}$;

в) $\int\limits_L |z| dz$, $L-$нижняя полуокружность $|z|=2$ от $z_1 = -2$ до $z_2 = 2$;

г) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{z^2}{z-2i}dz$; е) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz$;

д) $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{e^{z^2}}{z^2-2z}dz$; ж) $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^2}dz$.

Ответы к подразделу 6.2

а) $\dfrac{2i}{3}$; б) $-60+27\pi i$; в) -2; г) $\dfrac{14}{3}(-1+2i)$; д) $\dfrac{\pi i}{2}\text{sh}\,2$; е) 0; ж) $-\dfrac{4\pi i}{9}$; з) $\dfrac{2\pi i}{9}$; и) $4\pi i$; к) $\dfrac{\pi}{16}$; л) $\cos 2+i\sin 2$; м) $-\pi i\,\text{ch}1$.

Ответы к подразд. 6.3

а) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}i$; б) $-\dfrac{\pi}{2}+1-i$; в) 8; г) 0; д) $\pi i\left(e^4-1\right)$; е) $\pi\,\text{sh}1$; ж) $-2\pi^2 i$.

7 Ряды в комплексной области. Степенные ряды. Ряды Тейлора-Маклорена. Ряд Лорана

7.1 Основные понятия и определения

Теория числовых и функциональных рядов в комплексной области во многом аналогична теории числовых и функциональных рядов в действительной области, т. к. задание ряда в комплексной области равносильно заданию двух действительных рядов, для которых в силе все теоремы рядов в действительной области:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + ib_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Поскольку в инженерных приложениях важное место занимают степенные ряды, то остановимся на них.

Степенной ряд – функциональный ряд вида

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n , \quad (7.1)$$

его также называют рядом по степеням $z-z_0$.

При $z_0=0$

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n , \quad (7.2)$$

ряд называют рядом по степеням z.

Величины c_n $(n=0,1,2,\ldots)$ являются числами, и их называют коэффициентами ряда. Они могут быть как действительными, так и комплексными. Степенной ряд (7.1) всегда сходится в точке $z = z_0$, а ряд (7.2) – в точке $z_0 = 0$. Эти точки называют ***центрами сходимости*** рядов.

Основной вопрос в теории рядов – вопрос об установлении области сходимости. Сделать это позволяет ***теорема Абеля.***

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится при $z = z_1$, то он *сходится абсолютно* при всех z, удовлетворяющих неравенству $|z| < |z_1|$, т. е. в открытом круге радиусом $|z_1|$ с центром в точке $z_0 = 0$. Если же ряд расходится в точке $z = z_2$, то он *расходится* при всех z, для которых $|z| > |z_2|$, т. е. вне круга радиусом $|z_2|$.

Из теоремы следует, что существует такое число z_3 $(z_1 = z_2 = z_3)$, $|z_3| = R > 0$, что ряд сходится в открытом круге $|z| < R$ и расходится вне круга $|z| > R$. Число R называют ***радиусом сходимости*** ряда, а круг $|z| < R$ – ***кругом сходимости***. При этом ряд может сходиться в единственной точке, центре сходимости $z_0 = 0$ $(R = 0)$, или на всей комплексной плоскости $R = \infty$. Что касается окружности $|z| = R$, то на ней ряд может сходиться или расходиться на всей окружности или в некоторых ее точках сходиться, а в некоторых – расходиться.

Поскольку ряд из модулей является знакоположительным действительным рядом, то к нему можем применять все достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов, в частности, достаточные признак Даламбера и радикальный признак Коши. При этом если ряд полный, т. е. содержит все степени z или $(z - z_0)$, то область сходимости можно находить через радиус сходимости. Так, используя признак Даламбера, для радиуса сходимости можем получить

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}. \tag{7.3}$$

Соответственно, применительно к радикальному признаку Коши

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{7.4}$$

Если ряд неполный, т. е. не содержит всех степеней z (или $(z - z_0)$), например: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+1}$, или имеем ряд по отрицательным степеням z, т. е. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$, то в таких случаях область сходимости находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно применяют признаки Даламбера или радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|}<1, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}<1.$$

Пример 1 – Установить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$.

Решение

Ряд полный. Точка $z=0$ – центр сходимости, $c_n = n^n$. Найдем радиус сходимости по формуле (7.4):

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n}=0.$$

Ряд сходится в единственной точке $z=0$ – центре сходимости.

Пример 2 – Установить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$.

Решение

Ряд полный. Точка $z=0$ – центр сходимости, $c_n = \frac{1}{n}$. Найдем радиус сходимости по формуле (7.3):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Получим, что ряд сходится в круге $|z|<1$. При этом видно, что ряд расходится при $|z|=1$ и сходится в единственной точке окружности $z=-1$, причем неабсолютно.

Пример 3 – Установить область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{5^n}$.

Решение

Ряд неполный. Поэтому применим непосредственно признаки сходимости, в данном случае – радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|z^{2n}|}{5^n}}=\frac{|z|^2}{5}<1.$$

Имеем $|z|<\sqrt{5}$, ряд сходится в круге радиусом $R=\sqrt{5}$ с центром в точке $z=0$.

Исследуем ряд на границе $|z|=\sqrt{5}$, т. е. $z=\sqrt{5}e^{i\varphi}$. Получаем числовой ряд

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{5}e^{i\varphi}\right)^{2n}}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{i\varphi}\right)^{2n}$, который расходится на основании достаточного признака расходимости. Следовательно, область сходимости ряда – открытый круг $|z|<\sqrt{5}$.

7.2 Ряд Тейлора

Однозначная и аналитическая функция $f(z)$ в точке z_0 разлагается в окрестности этой точки в ***ряд Тейлора***:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n\,, \qquad (7.5)$$

где коэффициенты c_n ряда определяются по формуле

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,,\quad n=0,1,2,... \qquad (7.6)$$

При вычислении интеграла обход осуществляется в положительном направлении. При $z_0=0$ ряд (7.5) называют ***рядом Маклорена***.

Радиусом сходимости R ряда (7.5) является расстояние до ближайшей особой точки функции $f(z)$, а контуром интегрирования в формуле (7.6) – контур любой формы, расположенный в круге сходимости радиусом R.

Ряды основных элементарных функций комплексной переменной в области однозначности и аналитичности имеют вид рядов функций действительной переменной. Так, например, для основного периода ряды функций:

1) $e^z=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\ldots+\frac{1}{n!}z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$;

2) $\sin z=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$;

3) $\cos z=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$

сходятся на всей комплексной плоскости, а ряды функций:

4) $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+...+z^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$;

5) $\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ (для главного значения логарифма)

сходятся только в круге $|z|<1$.

7.3 Ряд Лорана

Функция $f(z)$ аналитическая в кольцевой области, ограниченной концентрическими окружностями $R_1 < |z - z_0| < R_2$, а z_0 – точка, в которой функция $f(z)$ неаналитическая, разлагается в этой области в ряд общего вида, а именно в ряд по положительным и отрицательным степеням $(z - z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{7.7}$$

где коэффициенты ряда определяются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{7.8}$$

Контуром L является любой замкнутый контур, лежащий в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, в частности, окружность радиусом r внутри кольцевой области $R_1 < r < R_2$.

Ряд (7.7) – ***ряд Лорана***. При этом ряд $\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n (z-z_0)^n$ называют ***правильной или регулярной частью*** ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ – его ***главной или сингулярной частью***. Правильная часть ряда Лорана есть степенной ряд, сходящийся в круге $|z - z_0| < R_2$, а главная часть представляет собой ряд, сходящийся вне круга $|z - z_0| > R_1$. Поскольку область сходимости суммы рядов – их общая область сходимости, то, очевидно, что ей является кольцевая область.

Для разложения функций в ряды Тейлора-Маклорена и Лорана необязательно пользоваться определением, т. е. коэффициенты ряда находить по формулам (7.6), (7.8). Можно применять приемы, как и в случае рядов для функций действительного аргумента, в частности, заменой переменной, метод дифференцирования и интегрирования, метод сложения и вычитания рядов, а также их различные комбинации.

Пример 4 – Разложить в ряд Маклорена функцию $f(z) = e^{z^2}$.

Решение

Делаем замену $z^2 = t$, имеем $f(t) = e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$.

Возвращаемся к старой переменной: $e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$. Находим область сходимости: $|t| < \infty \Rightarrow |z^2| < \infty$, т. е. $|z| < \infty$.

Пример 5 – Разложить в ряд Маклорена функцию $f(z) = \operatorname{ch} z$.

Решение

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(2\cdot 1 + 2\frac{z^2}{2!} + 2\frac{z^4}{4!} + \ldots + 2\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \infty.$$

Пример 6 – В окрестности точки $z_0 = 0$ разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

Решение

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots$$

Область сходимости $0 < |z| < \infty$. Ряд не имеет главной части.

Пример 7 – В окрестности точки $z_0 = 0$ разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$.

Решение

$f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3} = \dfrac{1}{z^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{z^2}{5!} - \dfrac{z^4}{7!} + \ldots$ Область сходимости $0 < |z| < \infty$. При этом выражение $\dfrac{1}{z^2}$ есть главная часть ряда Лорана, $-\dfrac{1}{3!} + \dfrac{z^2}{5!} - \dfrac{z^4}{7!} + \ldots$ – правильная.

Пример 8 – В окрестности точки $z_0 = 0$ разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$.

Решение

$$f(z) = \sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!\,z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots, \; |z| > 0.$$

Ряд не имеет правильной части.

7.4 Задачи для самостоятельного решения

1 Найти области сходимости следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^n}{5^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{(z-2i)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\dfrac{z-1}{4}\right)^n+\left(\dfrac{3}{z-1}\right)^n\right)$.

2 Разложить функции в ряд Тейлора по степеням $(z-z_0)$ и указать область сходимости полученных рядов:

а) $f(z)=\dfrac{1}{4z-1}$, $z_0=0$; г) $f(z)=\dfrac{1}{4z+3}$, $z_0=-1$;

б) $f(z)=\dfrac{z}{4+3z^2}$, $z_0=0$; д) $f(z)=e^z$, $z_0=-1$.

в) $f(z)=(1+z)e^{z^2}$, $z_0=0$;

3 Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2}$; в) $f(z)=z^3\sin\dfrac{1}{z}$; д) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3}$;

б) $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$; г) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$; е) $f(z)=\dfrac{e^{-z}-1}{z}$.

4 Разложить функции в ряд Лорана по степеням z в указанных кольцах:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$, $0<|z|<1$; $1<|z|<+\infty$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$, $2<|z|<3$; $3<|z|<+\infty$.

5 Разложить функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=z_0$ и указать области сходимости полученных рядов:

а) $f(z)=\dfrac{1}{2z-3z^2}$, $z_0=0$; б) $f(z)=\cos\dfrac{3z+4}{z+1}$, $z_0=-1$.

7.5 Домашнее задание

1 Разложить функции в ряд Маклорена и указать область сходимости полученных рядов:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z+8}$; б) $f(z)=\operatorname{sh} z$; в) $f(z)=\cos 2z$.

2 Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}$; в) $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$;

б) $f(z)=z^4\cos\dfrac{1}{z}$; г) $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z^4}$.

3 Разложить $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-8}$ в ряд Лорана по степеням z в кольце $2<|z|<4$.

4 Рассмотреть различные разложения $f(z)=\dfrac{3z+1}{z^2+5z+6}$ в ряд по степеням $z-1$ и указать области сходимости полученных рядов.

Ответы к подразд. 7.4

1 а) $1<|z-2i|<5$; б) $3<|z-1|<4$. **2** а) $-\sum_{n=0}^{\infty}4^n z^n$, $|z|<\dfrac{1}{4}$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^n}{4^{n+1}}z^{2n+1}$, $|z|<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{n!}$, $|z|<\infty$;

г) $-\sum_{n=0}^{\infty}4^n(z+1)^n$, $|z+1|<\dfrac{1}{4}$; д) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{en!}$, $|z+1|<\infty$.

3 а) $\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{z^2}{4!}-\dfrac{z^4}{6!}+\dfrac{z^6}{8!}-\ldots$; б) $z^2+z+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3!z}+\dfrac{1}{4!z^2}+\dfrac{1}{5!z^3}+\ldots$;

в) $z^2-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!z^2}-\dfrac{1}{7!z^4}+\dfrac{1}{9!z^6}-\ldots$; г) $\dfrac{2z}{2!}-\dfrac{8z^3}{4!}+\dfrac{32z^5}{6!}-\ldots$;

д) $\dfrac{1}{2!z}-\dfrac{z}{4!}+\dfrac{z^3}{6!}-\dfrac{z^5}{8!}+\ldots$; е) $-1+\dfrac{z}{2!}-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^3}{4!}-\dfrac{z^4}{5!}+\ldots$.

4 а) $\dfrac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{n+2}}$; б) $-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{z^n}-\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$.

5 а) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^{n+1}}z^{n-1}$, $0<|z|<\dfrac{2}{3}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n\cos 3}{(2n)!(z+1)^{2n}}-\dfrac{(-1)^{n+1}\sin 3}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}}\right)$, $0<|z+1|<\infty$.

Ответы к подразд. 7.5

1 а) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{2^{3(n+1)}}$, $|z|<8$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z|<\infty$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n}z^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$. **2** а) $\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{2!z}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{z}{4!}+\dfrac{z^2}{5!}+\dfrac{z^3}{6!}+\ldots$;

б) $z^4-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{6!z^2}+\dfrac{1}{8!z^4}-\ldots$; в) $\dfrac{4^2}{2!2z^3}-\dfrac{4^4}{4!2z^5}+\dfrac{4^6}{6!2z^7}-\ldots$;

г) $\dfrac{2}{z^4}-\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{z^2}{6!}+\ldots$. **3** $\dfrac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{z^n}-\dfrac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{4^{n+1}}$.

4 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{8}{4^{n+1}}-\dfrac{5}{3^{n+1}}\right)(z-1)^n$, $|z-1|<3$;

$8\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-1)^n}{4^{n+1}}-5\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^n}{(z-1)^{n+1}}$, $3<|z-1|<4$; $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{8\cdot 4^n-5\cdot 3^n}{(z-1)^{n+1}}$, $|z-1|>4$.

8 Нули и особые точки функций

8.1 Нули функции

Если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f(z_0)=0$, то точка z_0 – ***нуль функции***. Точка z_0 называется нулем функции k-го порядка (или нулем кратности k), если выполнены условия

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\ldots=f^{(k-1)}(z_0)=0,\ \text{а}\ f^{(k)}(z_0)\neq 0.$$

Функция $f(z)$ представима в виде $f(z)=(z-z_0)^k\,\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, $\varphi(z_0)\neq 0$. Верно и обратное. Заметим, что если $k=1$, т. е. $f(z_0)=0$, то говорят, что точка z_0 – простой нуль. Данные утверждения следуют из разложений $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности z_0.

Пример 1 **–** Найти порядок нуля $z_0=0$ для $f(z)=1-\cos z$.

Решение

Разлагая функцию в ряд Маклорена $(z_0=0)$, получаем

$$f(z)=1-\cos z=1-\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6+\ldots\right)=\frac{1}{2!}z^2-\frac{1}{4!}z^4+\frac{1}{6!}z^6-\ldots=$$

$$=z^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}z^2+\frac{1}{6!}z^4-\ldots\right)=z^2\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{4!}z^2+\dfrac{1}{6!}z^4-\ldots$, $\varphi(0)=\dfrac{1}{2}\neq 0$. Следовательно, точка $z_0=0$ – нуль второго порядка, т. е. $k=2$.

Пример 2 **–** Найти порядок нуля $z_0=0$ для $f(z)=\dfrac{z^7}{z-\sin z}$.

Решение

Разлагая функцию в ряд Маклорена $(z_0=0)$, получаем

$$\frac{z^7}{z-\sin z}=\frac{z^7}{z-\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\ldots\right)}=\frac{z^7}{\frac{1}{3!}z^3-\frac{1}{5!}z^5+\frac{1}{7!}z^7+\ldots}=$$

$$=\frac{z^4}{\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}z^2+\frac{1}{7!}z^4+\ldots}=z^4\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=\frac{1}{\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}z^2+\frac{1}{7!}z^4+\ldots}$, $\varphi(0)=6\neq 0$. Следовательно, точка $z_0=0$ – нуль четвертого порядка.

8.2 Особые точки функций и их классификация

Точку z_0, в которой однозначная функция $f(z)$ является аналитической, называют ***правильной*** (регулярной), а если в точке z_0 функция $f(z)$ неаналитическая, то точка z_0 ***особая***. Особую точку z_0 называют ***изолированной особой точкой***, если в окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек, т. е. $f(z)$ является аналитической. Окрестность такой точки часто именуют ***проколотой***.

Классификация особых точек.

1 Изолированная особая точка z_0 называется ***устранимой особой точкой*** функции $f(z)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=C\neq\pm\infty$, а лорановское разложение функции в окрестности этой точки не содержит главной части:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n\ .$$

2 Особую точку z_0 называют ***полюсом*** функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, а лорановское разложение функции в окрестности этой точки содержит конечное число слагаемых в главной части:

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)^1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n\ .$$

При этом наибольший из показателей степени $(z-z_0)$ в знаменателе, т. е. число $k\neq 0$, совпадает с порядком полюса.

Если $k=1$, то точку z_0 называют ***простым полюсом***.

Для того чтобы $z = z_0$ была полюсом порядка k функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}$, где $\varphi(z)$ – аналитическая в точке z_0 функция и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Если точка $z = z_0$ – нуль порядка k функции $f_1(z)$ и нуль порядка m функции $f_2(z)$ ($m > k$), то она является полюсом порядка $(m-k)$ функции $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$.

3 Изолированная особая точка z_0 называется ***существенно особой точкой*** функции $f(z)$, если функция $f(z)$ в точке z_0 не имеет предела, а главная часть лорановского разложения функции в окрестности этой точки содержит бесконечное множество слагаемых:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

Пример 3 **–** Определить вид особой точки $z_0 = 0$ для $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

Решение

Разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ имеет вид:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \ldots \right) = 1 - \frac{1}{3!}z^2 +$$

$$+ \frac{1}{5!}z^4 - \frac{1}{7!}z^6 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n} + \ldots$$

Соответственно, $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = \lim\limits_{z \to 0}\left(1 - \dfrac{1}{3!}z^2 + \dfrac{1}{5!}z^4 - \dfrac{1}{7!}z^6 + \ldots \right) = 1,$ значит $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

Пример 4 **–** Определить вид особой точки $z_0 = 0$ для $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$.

Решение

Разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ имеет вид:

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \ldots \right) =$$

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}z - \frac{1}{7!}z^3 + \frac{1}{9!}z^5 - \ldots$$

При этом $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z^4}=\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{3!}\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{5!}z-\dfrac{1}{7!}z^3+\dfrac{1}{9!}z^5-\ldots\right)=\infty$. Следовательно, точка $z_0=0-$ полюс функции, причем полюс третьего порядка.

Пример 5 **–** Определить вид особой точки $z_0=0$ для $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

Решение

Разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$ имеет вид:

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\ldots$$

Следовательно, $z_0=0-$ существенно особая.

8.3 Бесконечно удаленная точка $z=\infty$

Окрестностью точки $z=\infty$ является внешность круга большим радиусом R с центром в точке $z=0$. Изучение поведения функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$ путем подстановки $z=\dfrac{1}{s}$ можно свести к изучению поведения функции $\varphi(s)=f\left(\dfrac{1}{s}\right)$ в окрестности точки $s=0$, для которой также не определен аргумент. При этом справедливы предельные соотношения $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\infty}=0$, $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

Бесконечно удаленная точка $z=\infty$ может быть как регулярной (правильной), так и особой точкой функции $f(z)$.

Точку $z=\infty$ называют ***изолированной особой точкой***, если в ее окрестности нет других особых точек, т. е. функция в окрестности этой точки аналитическая.

Бесконечно удаленная изолированная особая точка $z=\infty$ может быть устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$, если точка $s=\dfrac{1}{z}=0$, соответственно, является устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции $f\left(\dfrac{1}{s}\right)$.

8.4 Задачи для самостоятельного решения

Найти особые точки функций и исследовать их характер:

а) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$; б) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$;

в) $f(z)=\dfrac{z-1}{(z+i)(z-3)^2(z+4)^3}$;

г) $f(z)=z^2\cdot e^{\frac{1}{z}}$;

д) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$;

е) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}$;

ж) $f(z)=\dfrac{z^4}{z^4+1}$;

з) $f(z)=\dfrac{4z^2-1}{(2z^2-3z-2)^3}$;

и) $f(z)=\dfrac{1}{z}\cdot e^{\frac{z+1}{z}}$.

8.5 Домашнее задание

Найти особые точки функций и исследовать их характер:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z^2+4)^2}$;

б) $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$;

в) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+5z+4}$;

г) $f(z)=\dfrac{\sin 5z}{z-\pi}$;

д) $f(z)=\dfrac{1+\cos \pi z}{(3z^2+z-2)^2}$;

е) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$.

Ответы к подразд. 8.4

а) $z=0-$ устранимая особая точка, $z=\pi n$, $n\neq 0-$ простые полюсы; б) $z=0-$ устранимая особая точка; в) $z=-i$ – простой полюс, $z=3$ – полюс 2-го порядка, $z=-4-$полюс 3-го порядка; г) $z=0-$ существенно особая точка; д) $z=\pm 1-$ простые полюсы, $z=\pm i-$ полюсы 2-го порядка; е) $z=1$ – простой полюс, $z=-1$ – полюс 2-го порядка; ж) $z=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ – четыре простых полюса; з) $z=2$ – полюс 3-го порядка, $z=-\dfrac{1}{2}$ – полюс 2-го порядка; и) $z=0-$ существенно особая точка.

Ответы к подразд. 8.5

а) $z=0-$ полюс 3-го порядка, $z=\pm 2i-$ полюсы 2-го порядка; б) $z=1-$ существенно особая точка; в) $z=-1$, $z=-4$ – простые полюсы; г) $z=\pi-$ устранимая особая точка; д) $z=\dfrac{2}{3}-$ полюс 2-го порядка, $z=-1-$ устранимая особая точка; е) $z=0-$ существенно особая точка.

9 Вычеты функций и их применение

9.1 Основные понятия и определения

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называют комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)dz$, взятому в положительном направлении по некоторому замкнутому контуру C, содержащему внутри себя только одну особую точку z_0 и не выходящему за пределы области аналитичности $f(z)$. Вычет обозначают $\operatorname{Res}\left[f(z);z_0\right]$ или $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$.

В качестве контура C удобно брать окружность $|z-z_0|=R$ радиусом R с центром в точке z_0. Как показывает анализ коэффициентов ряда Лорана, вычет функции равен коэффициенту c_{-1} при минус первой степени в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$\operatorname{Res}\left[f(z);z_0\right]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=R} f(z)dz.$$

Вычеты функций относительно изолированных особых точек функции $f(z)$ можно вычислять на основании определения вычета, т. е. находить значения контурных интегралов или, разложив функцию в ряд Лорана, брать коэффициент c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$. Однако в некоторых случаях может быть указан более простой способ вычисления вычета, сводящийся к дифференцированию функции $f(z)$ в окрестности особой точки z_0. При этом расчетные формулы зависят от типа особой точки.

1 Пусть точка z_0 – ***устранимая особая точка*** функции $f(z)$. Поскольку в лорановском разложении функции $f(z)$ для такой точки отсутствует главная (сингулярная) часть, то для таких точек вычет всегда равен нулю, т. е.

$$\operatorname{Res}\left[f(z);z_0\right]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=R} f(z)dz=0.$$

2 Пусть точка z_0 – ***простой полюс*** функции $f(z)$. Тогда

$$\operatorname{Res}\left[f(z);z_0\right]=c_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Если в данном случае функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 представима в виде отношения двух аналитических функций $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0)\neq 0$, а точка z_0 является нулем первого порядка для функции $\psi(z)$, то

$$\operatorname{Res}\left[f(z);z_0\right]=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Если точка z_0 – ***полюс порядка*** k функции $f(z)$, то расчетная формула для вычисления вычета функции в полюсе порядка k имеет вид:

$$\operatorname{Res}\left[f(z);z_0\right]=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right].$$

3 Пусть z_0 – ***существенно особая точка*** функции $f(z)$. Для вычисления вычета в этой точке обычно непосредственно определяют коэффициент c_{-1} в разложении функции в ряд Лорана.

4 Вычет функции в ***бесконечно удаленной особой точке*** $z=\infty$

$$\operatorname{Res}\left[f(z);\infty\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R^-} f(z)dz,$$

где C_R^- – окружность достаточно большим радиусом R, и обход контура осуществляется по часовой стрелке. Из этого определения следует, что вычет в бесконечно удаленной особой точке равен коэффициенту c_{-1} в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$, взятому со знаком «минус», т. е.

$$\operatorname{Res}\left[f(z);\infty\right]=-c_{-1}.$$

Заметим, что коэффициент c_{-1} находится в правильной (регулярной) части ряда Лорана.

Основная теорема о вычетах. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, ограниченной замкнутым контуром C, за исключением конечного числа особых точек z_k, лежащих внутри C. Тогда интеграл от функции $f(z)$ по контуру C, проходимому в положительном направлении, равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов функции $f(z)$ относительно точек z_k, попавших внутрь C, т. е.

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[f(z);z_k\right].$$

Обобщенная теорема о вычетах. Если $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_1, z_2, …, z_{N-1}, включая и $z_N=\infty$, то

$$\operatorname{Res}\left[f(z);\infty\right]+\sum_{k=1}^{N-1}\operatorname{Res}\left[f(z);z_k\right]=0.$$

Пример 1 – Найти вычеты функции $f\left(z\right)=\dfrac{3z^2+2}{z-1}$.

Решение

Функция имеет простой полюс в точке $z=1$.

$$\operatorname{Res}\left[f\left(z\right);1\right]=\lim_{z\to 1}\left(z-1\right)\frac{3z^2+2}{z-1}=\lim_{z\to 1}\left(3z^2+2\right)=5.$$

Вычет можно найти иначе. Поскольку $f\left(z\right)=\dfrac{3z^2+2}{z-1}$ представляет собой отношение двух аналитических функций, то

$$\operatorname{Res}\left[f\left(z\right);1\right]=\left.\frac{3z^2+2}{\left(z-1\right)'}\right|_{z=1}=\left.\left(3z^2+2\right)\right|_{z=1}=5.$$

Пример 2 – Найти вычеты функции $f\left(z\right)=\operatorname{ctg} z$.

Решение

$f\left(z\right)=\operatorname{ctg} z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$. Функция имеет простые полюсы в точках $z=k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$.

$$\operatorname{Res}\left[f\left(z\right);k\pi\right]=\left.\frac{\cos z}{\left(\sin z\right)'}\right|_{z=k\pi}=\left.\frac{\cos z}{\cos z}\right|_{z=k\pi}=1.$$

Пример 3 – Найти вычеты функции $f\left(z\right)=\dfrac{\cos z}{z^2\left(z-\pi\right)}$.

Решение

Функция имеет простой полюс в точке $z=\pi$ и полюс второго порядка в точке $z=0$.

$$\operatorname{Res}\left[f\left(z\right);\pi\right]=\lim_{z\to\pi}\left(z-\pi\right)\frac{\cos z}{z^2\left(z-\pi\right)}=\left.\frac{\cos z}{z^2}\right|_{z=\pi}=-\frac{1}{\pi^2}.$$

Пример 4 – Найти вычеты функции $f\left(z\right)=e^{\frac{1}{z}}$.

Решение

Функция имеет существенно особую точку $z=0$. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\ldots$$

Следовательно, $\operatorname{Res}\left[f\left(z\right);0\right]=c_{-1}=1$.

Вычеты и теоремы о вычетах могут быть применены, в частности, к вычислению контурных, некоторых определённых и несобственных интегралов. Например, для контурных интегралов на базе основной теоремы о вычетах можем записать следующее:

$$\oint_C f(z)\,dz = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z); z_k \right], \text{если } z_k \text{ расположены внутри контура } C, \\ 0, \quad \text{если } z_k \text{ расположены вне контура } C. \end{cases}$$

С помощью вычетов в ряде случаев могут быть вычислены несобственные интегралы от функции действительной переменной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z); z_k \right],$$

где z_k – полюсы функции $f(z)$, расположенные в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$).

Пример 5 – Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Решение

Подынтегральная функция является аналитической в верхней полуплоскости, за исключением точки $2i$. Эта точка – полюс второго порядка. Найдем вычет функции:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^2+4)^2}; 2i \right] = \lim_{z \to 2i} \left(\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2} \right)' = \lim_{z \to 2i} \left(\frac{1}{(z+2i)^2} \right)' =$$

$$\lim_{z \to 2i} \frac{-2}{(z+2i)^3} = \frac{1}{32i}.$$

Получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}.$

9.2 Задачи для самостоятельного решения

1 Найти вычеты во всех изолированных особых точках:

а) $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$; г) $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)^3}$; ж) $f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}$;

б) $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$; д) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z+\pi)}$; з) $f(z) = \cos\frac{z}{z-1}$.

в) $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)^2}$; е) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$;

2 Вычислить интегралы с помощью вычетов:

а) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1}dz$;

б) $\oint\limits_{|z=0,5|} \frac{z^2}{z-1}dz$;

в) $\oint\limits_{|z|=1} \operatorname{ctg} z dz$;

г) $\oint\limits_{|z|=4} \operatorname{ctg} z dz$;

д) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}dz$;

е) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}dz$;

ж) $\int\limits_L \frac{zdz}{\cos z}$, L – прямоугольник с вершинами $z=\pm i$, $z=2\pm i$;

з) $\oint\limits_{|z|=2} e^{\frac{1}{z+1}}dz$;

и) $\oint\limits_{|z-1|=1} (z-1)^2 \cdot \sin\frac{1}{z-1}dz$;

к) $\oint\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz$.

9.3 Домашнее задание

1 Найти вычеты во всех изолированных особых точках:

а) $f(z)=\frac{z+i}{z-i}$;

б) $f(z)=\frac{1}{z-z^3}$;

в) $f(z)=\frac{\sin z}{z^2(z+\pi)^2}$;

г) $f(z)=\sin\frac{1}{z^2}$.

2 Вычислить интегралы с помощью вычетов:

а) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}dz$;

б) $\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^3(z^2+4)^2}$;

в) $\oint\limits_{|z|=1} z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}dz$;

г) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}dz$;

д) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{zdz}{\sin z}$;

е) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{z(z+1)^2}$.

Ответы к подразд. 9.2

1 а) $\operatorname{Res}[f(z);1]=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{Res}[f(z);3]=\frac{3}{2}$; б) $\operatorname{Res}[f(z);2i]=-\frac{i}{4}$, $\operatorname{Res}[f(z);-2i]=\frac{i}{4}$; в) $\operatorname{Res}[f(z);0]=3$, $\operatorname{Res}[f(z);1]=-3$;
г) $\operatorname{Res}[f(z);2]=1$; д) $\operatorname{Res}[f(z);0]=-\frac{1}{\pi^2}$, $\operatorname{Res}[f(z);-\pi]=0$;
е) $\operatorname{Res}[f(z);0]=0$, $\operatorname{Res}[f(z);\pi n]=(-1)^n\pi n, n\neq 0$; ж) $\operatorname{Res}[f(z);0]=\frac{1}{6}$;

з) $\operatorname{Res}\left[f(z);1\right]=-\sin 1$. **2** а) $2\pi i$; б) 0; в) $2\pi i$; г) $6\pi i$; д) $2\pi i\,\operatorname{sh}1$; е) $-\dfrac{2i}{\pi}$; ж) $-\pi^2 i$; з) $2\pi i$; и) $-\dfrac{\pi i}{3}$; к) $-4\pi i$.

Ответы к подразд. 9.3

1 а) $\operatorname{Res}\left[f(z);i\right]=2i$; б) $\operatorname{Res}\left[f(z);0\right]=1$, $\operatorname{Res}\left[f(z);1\right]=-\dfrac{1}{2}$; в) $\operatorname{Res}\left[f(z);0\right]=\dfrac{1}{\pi^2}$, $\operatorname{Res}\left[f(z);-\pi\right]=-\dfrac{1}{\pi^2}$; г) $\operatorname{Res}\left[f(z);0\right]=0$. **2** а) $-\dfrac{4i}{\pi}$; б) $-\dfrac{\pi i}{32}$; в) $\dfrac{\pi i}{3}$; г) $2\pi i$; д) 0; е) $2\pi i$.

Список литературы

1 **Пантелеев, А. В.** Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – Москва: Высшая школа, 2007. – 448 с.

2 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.