ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты заданий к контрольной работе №3 для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Могилев 2008

УДК 517
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «8» июня 2008 г., протокол № 10

Составители: ст. преподаватель Т. А. Кулешова,
ст. преподаватель С. А. Скрыган

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Л. В. Плетнев

Методические указания содержат рекомендации по выполнению контрольной работы, варианты заданий и список литературы.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск Л. В. Плетнев

Технический редактор А. Т. Червинская

Компьютерная верстка И. А. Алексеюс

Подписано в печать 3.12.2008. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1.16. Уч.-изд. л. 1.0. Тираж 315 экз. Заказ № 783/

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/375 от 29.06.2004 г.
212000, г. Могилев, пр. Мира, 43

1 Решение типового варианта задания

Задача 1. Решить дифференциальные уравнения:
1) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$; 2) $2yy'' = (y')^2$.

Решение

1) Надо решить линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Будем искать решение в виде $y(x) = u(x)\cdot v(x)$ (метод Бернулли). Подставляя $y(x)$ в данное уравнение и опуская обозначение аргумента x, получаем $v\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{dv}{dx} + uv\cos x = e^{-\sin x}$, или $v\dfrac{du}{dx} + u\left(\dfrac{dv}{dx} + v\cos x\right) = e^{-\sin x}$. Выберем в качестве $v(x)$ одно из отличных от тождественного нуля решений дифференциального уравнения $\dfrac{dv}{dx} + v\cos x = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. После разделения переменных и интегрирования находим $v(x) = e^{-\sin x}$. Тогда $u(x)$ должно удовлетворять уравнению $\dfrac{du}{dx} = 1$, после интегрирования которого получаем $u(x) = x + C$. В итоге общее решение данного уравнения следующее:

$$y(x) = e^{-\sin x}(x + C).$$

2) Понизим порядок уравнения до первого с помощью подстановки $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Итак, получаем уравнение с разделяющимися переменными $2yp\dfrac{dp}{dy} = p^2$. Переменные разделяем: $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dy}{2y}$. После интегрирования получаем $p = C_1\sqrt{y}$. Далее $y' = C_1\sqrt{y}$ или $\dfrac{dy}{dx} = C_1\sqrt{y}$. После разделения переменных и интегрирования находим общее решение данного уравнения

$$y = \frac{1}{4}(C_1 x + C_2).$$

Задача 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 4xe^x$.

Решение

Надо решить дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Его общее решение состоит из суммы общего решения однородного уравнения, соответствующего данному, и частного решения неоднородного уравнения: $y = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$. Запишем однородное уравнение, соответствующее данному: $y'' + y = 0$. Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$ являются комплексно сопряженные числа $\lambda_{1,2} = \pm i$. Тогда $y_{о.о.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Так как $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид: $y_{ч.н.} = (ax + b)e^x$, где a, b – постоянные, подлежащие определению. Последовательно находим $y'_{ч.н.} = (ax + a + b)e^x$, $y''_{ч.н.} = (ax + 2a + b)e^x$. Подставляя $y_{ч.н.}$ и $y''_{ч.н.}$ в исходное уравнение, получаем $(ax + 2a + b)e^x + (ax + b)e^x = 4xe^x$, или, после сокращения на e^x: $2ax + 2a + 2b = 4x$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим $a = 2,\ \ b = -2$. Итак, $y_{ч.н.} = (2x - 2)e^x$, а общее решение исходного уравнения примет вид:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)e^x.$$

Задача 3. Найти общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2. \end{cases}$

Решение

Матрица A и характеристическое уравнение системы в данном случае имеют вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, имеющее два действительных различных корня $\lambda_1 = 3,\ \ \lambda_2 = -1$. Они являются собственными значениями матрицы A.

Найдем собственные векторы матрицы A, отвечающие этим собственным значениям. При $\lambda = \lambda_1 = 3$ система $(A - \lambda E)\vec{\alpha} = \vec{0}$ имеет решение, например, $\alpha_{11} = \alpha_{21} = 1$, т. е. значению $\lambda_1 = 3$ соответствует собственный вектор $\vec{\alpha}_1 = (1; 1)^T$.

При $\lambda = \lambda_2 = -1$ система $(A - \lambda E)\vec{\alpha} = \vec{0}$ имеет, например, решение $\alpha_{12} = 1,\ \ \alpha_{22} = -1$, т. е. собственному значению $\lambda_2 = -1$ отвечает собственный вектор $\vec{\alpha}_2 = (1; -1)^T$.

Таким образом, вектор-функции $\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$, $\quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$ образуют фундаментальную систему решений рассматриваемой системы. Тогда общее решение этой системы в векторной форме $\vec{x}(t) = C_1\,\vec{x}_1(t) + C_2\,\vec{x}_2(t)$ или в координатной $\begin{cases} x_1(t) = C_1\,e^{3t} + C_2\,e^{-t}; \\ x_2(t) = C_1\,e^{3t} - C_2\,e^{-t}, \end{cases}$

где C_1 и C_2 − произвольные постоянные.

Задача 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимости следующие ряды: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{3}{2n+1}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Решение

1) Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд, составленный из модулей его членов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\left(-\dfrac{3}{2n+1}\right)^n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2n+1}\right)^n$.

Воспользуемся предельным признаком сходимости Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n+1} = 0 < 1 .$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2n+1}\right)^n$ сходится и значит исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{3}{2n+1}\right)^n$ также сходится, причем абсолютно.

2) Проверим, сходится ли ряд абсолютно. Для этого составим ряд из модулей его членов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Этот ряд, как ряд Дирихле с параметром $\alpha = \dfrac{1}{2} \le 1$, расходится. Итак, исследуемый ряд не является абсолютно сходящимся. Исследуем ряд на условную сходимость. Условия признака Лейбница выполняются: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, 2) $1 \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{3}} \ge \ldots \ge \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \ge \ldots$, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ сходится. Таким образом, исследуемый ряд является условно сходящимся.

Задача 5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(3n+1)2^n}$.

Решение

Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$ можно найти по формуле

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Итак, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+4)2^{n+1}}{(3n+1)2^n} = 2$, т. е. ряд сходится в интервале $(-2; 2)$ и расходится при $|x| > 2$. В граничных точках $x = -2$ и $x = 2$ интервала сходимости получаем условно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ и расходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3n+1}$ соответственно. Следовательно, область сходимости данного ряда есть промежуток $[-2; 2)$.

Задача 6. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\pi; 0), \\ -2, & x \in [0; \pi) \end{cases}$ в ряд Фурье на промежутке $(-\pi; \pi)$.

Решение

Вычисляем для данной функции коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(x+1)\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(-2)\cdot dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{\pi}x\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\left(0^2 - (-\pi)^2\right) + 0 - (-\pi)\right) -$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(0 - (-\pi)\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2} + \pi\right) - 2 = -\frac{\pi}{2} - 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(x+1)\cos nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0}(x+1)\cdot d(\sin nx) - \frac{2}{\pi n}\sin nx\Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left((x+1)\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0} - \int\limits_{-\pi}^{0}\sin nx\cdot dx\right) - \frac{2}{\pi n}(\sin \pi n - \sin 0) = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos n\pi),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(x+1)\sin nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0}(x+1)\cdot d(\cos nx) + \frac{2}{\pi n}\cos nx\Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left((x+1)\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{0} - \int\limits_{-\pi}^{0}\cos nx\cdot dx\right) + \frac{2}{\pi n}(\cos \pi n - \cos 0) = -\frac{1}{\pi n}\left(1 - (1-\pi)\cos \pi n\right) + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0} +$$

$$+\frac{2}{\pi n}(\cos \pi n - 1) = \frac{1}{\pi n}(-1 + \cos \pi n - \pi\cos \pi n + 2\cos \pi n - 2) = \frac{1}{\pi n}\left((3-\pi)\cos \pi n - 3\right).$$

Получаем, что тригонометрическим рядом функции $f(x)$ является следующий ряд:

$$f(x) \approx S(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1 - \cos n\pi)\cos nx + \frac{1}{n}\left((3-\pi)\cos n\pi - 3\right)\sin nx.$$

Задача 7. Вычислить работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + (y + x)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $y = x$ от точки $O(0;0)$ к точке $A(1;1)$.

Решение

Пусть $\vec{F} = P(x;y)\vec{i} + Q(x;y)\vec{j}$ есть переменная сила, совершающая работу A вдоль пути L, и функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны на кривой L. Тогда $A = \int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy$. В данной задаче $A = \int\limits_L xydx + (y + x)dy$. Так как интегрируем по прямой $y = x$ и при перемещении из точки O в точку A x меняется от 0 до 1, получаем $A = \int\limits_0^1 x \cdot x \cdot dx + (x + x) \cdot dx = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right)\Bigg|_0^1 =$
$= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

Задача 8. С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + (2y - x)\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $(P): x - 2y + 2z = 4$ и координатными плоскостями.

Решение

Координаты вершин пирамиды: $(0;0;0), (4;0;0), (0;-2;0), (0;0;2)$. Формула Остроградского-Гаусса: $\Pi = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz$. Находим $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(x + z)}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(2y - x)}{\partial y} = 2$, $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1$. Так как интеграл $\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$ равен объему прямоугольной пирамиды V, то $\Pi = \iiint\limits_V (1 + 2 + 1)\,dx\,dy\,dz = 4\iiint\limits_V dx\,dy\,dz =$
$= 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = \frac{32}{3}$.

2 Варианты к контрольной работе № 3

2.1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (таблица 1).

Таблица 1 – Данные для решения задания 1

Номер варианта	а	б
1	2	3
1	$\left(x^2-y^2\right)y'=2xy$	$\left(1-x^2\right)y''=x\,y'$
2	$\left(1+x^2\right)y'-2xy=\left(1+x^2\right)^2$	$y''=y'+\left(y'\right)^2$
3	$x\,y'=y\ln\left(y/x\right)$	$y''+y'\,tgx=\sin(2\,x)$
4	$y'-\frac{y}{x}-\frac{1}{\sin\frac{y}{x}}=0$	$y''+\frac{1}{x}y'=x^2$
5	$x\,y'+x\,e^{y/x}-y=0$	$1+\left(y'\right)^2+y\,y''=0$
6	$y'\cos x=(y+1)\sin x$	$(1+y)y''-5\left(y'\right)^2=0$
7	$x\,y'-y=\sqrt{x^2+y^2}$	$x\,y''+2\,y'=x^3$
8	$x^2\,y'-2\,x\,y=3$	$y''\,tgy=2\left(y'\right)^2$
9	$x^2\,y'+y^2-2\,x\,y=0$	$y''-2\,y'\,tgx=\sin x$
10	$x\,y'+y=x+1$	$3\,y\,y''+\left(y'\right)^2=0$
11	$x\,dy=\left(x^4-2\,y\right)dx$	$y''+\frac{1}{x}y'=0$
12	$y'=\frac{x\,y+y^2\,e^{-x/y}}{x^2}$	$x(\,y''+1)+y'=0$
13	$x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$	$2\,x\,y'\,y''=\left(y'\right)^2-1$
14	$x^2\,y'=x\,y+y^2$	$x^3\,y''+x^2\,y'=1$
15	$x\,y'=y+x\left(1+e^{y/x}\right)$	$x\,y''=\,y'+x^2$
16	$y'=4+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$	$x^2\,y''+x\,y'=1$
17	$x\,y'-y=x\,tg\left(y/x\right)$	$\left(y'\right)^2+2\,y\,y''=0$
18	$x\,y'+y=\sin x$	$y''\,x\ln x=y'$
19	$\left(1+e^x\right)y\,y'-e^y=0$	$x\,y''-y'=x^2\,e^x$
20	$x\,y'=y-x\,e^{y/x}$	$x^2\,y''+x\,y'=1$
21	$x^2\,y'+2\,x\,y=1$	$y''+2\,y\left(y'\right)^3=0$
22	$y'+y=3\,x+2$	$y'''\,x\ln x=y''$
23	$\left(x^2+y^2\right)dx-x\,y\,dy=0$	$x\,y''=y'+x^2$
24	$y'-y\cos x=-\cos x$	$2\,y\,y''+(y')^2=0$
25	$y'+x^2\,y=x^2\,e^{-x^3/3}$	$y''(1+y)=y'+\left(y'\right)^2$

Окончание таблицы 1

1	2	3
26	$(x+1)y' + y = x+1$	$y'' = y' e^{y}$
27	$2x^3 y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$	$y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$
28	$x^2 y' + y^2 = x y y'$	$y'' + y' = \sin x$
29	$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$	$y'' ctgx + y' = 2$
30	$(x y' - 1)\ln x = 2y$	$2(y')^2 = (y-1)y''$

2.2 Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям (таблица 2).

Таблица 2 – Данные для решения задания 2

Номер варианта	Условие задачи
1	2
1	$y'' + 4y' - 12y = 8\sin(2x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
2	$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \ y'(0) = \frac{1}{27}$
3	$y'' + 4y = e^{-2x}, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$
4	$y'' - 2y' + 5y = x e^{2x}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0$
5	$y'' + 5y' + 6y = 12\cos(2x), \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 3$
6	$y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$
7	$y'' - 4y' + 13y = 26x + 5, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0$
8	$y'' - 4y' = 6x^2 + 1, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = 3$
9	$y'' - 2y' + y = 16e^{x}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 2$
10	$y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = 2$
11	$y'' + 6y' + 13y = 8e^{-x}, \quad y(0) = \frac{2}{3}, \ y'(0) = 2$
12	$y'' - 4y' + 8y = 8x^2 + 4, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = 3$
13	$y'' + y' - 6y = 50\cos x, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = 5$
14	$y'' + 2y' + 5y = 13e^{2x}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 4$
15	$y'' - 4y' + 5y = 10x, \quad y(0) = 10, \ y'(0) = 6$
16	$y'' - 4y' + 4y = 3x - x^2, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = \frac{4}{3}$
17	$y'' - 6y' + 9y = 4e^{x}, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = 8$
18	$y'' + y = \sin(2x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
19	$y'' - 2y' + y = -12\cos(2x) - 9\sin(2x), \quad y(0) = -2, \ y'(0) = 0$
20	$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \quad y(0) = -1, \ y'(0) = 1$
21	$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 4$
22	$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3 - 4x), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$
23	$y'' + 3y' = e^{2x}(58 + 40x), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 2$

Окончание таблицы 2

1	2
24	$y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 2$
25	$y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3, \quad y(0) = 5, \ y'(0) = 2$
26	$y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = 7$
27	$y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = 2$
28	$y'' + 16y = 32e^{4x}, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = 0$
29	$y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x, \quad y(0) = -2, \ y'(0) = -2$
30	$y'' - 4y = 8e^{2x}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -8$

2.3 Найти общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (таблица 3).

Таблица 3 – Данные для решения задания 3

Номер варианта	Условие задачи	Номер варианта	Условие задачи
1	$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$	16	$\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$
2	$\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y \end{cases}$	17	$\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y \end{cases}$
3	$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$	18	$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$
4	$\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$	19	$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$
5	$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x \end{cases}$	20	$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$
6	$\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = y \end{cases}$	21	$\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$
7	$\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y \end{cases}$	2	$\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y \end{cases}$
8	$\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$	23	$\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$
9	$\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$	24	$\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y \end{cases}$
10	$\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y \end{cases}$	25	$\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$
11	$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y \end{cases}$	26	$\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y \end{cases}$
12	$\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x \end{cases}$	27	$\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y \end{cases}$

Окончание таблицы 3

Номер варианта	Условие задачи	Номер варианта	Условие задачи
13	$\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$	28	$\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y \end{cases}$
14	$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$	29	$\begin{cases} x' = -5x + 2y, \\ y' = x - 6y \end{cases}$
15	$\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$	30	$\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y \end{cases}$

2.4 Исследовать знакочередующийся ряд на абсолютную и условную сходимости (таблица 4).

Таблица 4 – Данные для решения задания 4

Номер варианта	Условие задачи	Номер варианта	Условие задачи
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$	16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+1}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{6n+5}$	17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$	18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\, 5^n}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$	19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$	20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$	21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$	22	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{9^n}$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$	23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$	24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+5}{n^3}$
10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3^n}$	25	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n-1}$	26	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$
12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$	27	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+1)!}$

Окончание таблицы 4

Номер варианта	Условие задачи	Номер варианта	Условие задачи
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n-1)}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{12^n}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$	29	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{9n-1}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n-8}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(5n+1)^n}$

2.5 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ (таблица 5).

Таблица 5 – Данные для решения задания 5

Номер варианта	Условие задачи	Номер варианта	Условие задачи
1	$a_n=\frac{2^n}{n^2+1}$	16	$a_n=\frac{(n+1)^2}{2^n}$
2	$a_n=\frac{1}{n2^n}$	17	$a_n=\frac{5^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$
3	$a_n=\frac{1}{n}$	18	$a_n=\frac{\sqrt{n}}{n!}$
4	$a_n=\frac{2^n}{2n-1}$	19	$a_n=\frac{1}{3^n\sqrt{2n+1}}$
5	$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$	20	$a_n=\frac{2^n}{\sqrt{n}}$
6	$a_n=n(n+1)$	21	$a_n=\frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}$
7	$a_n=\frac{10^n}{\sqrt{n}}$	22	$a_n=\frac{2^n}{n(n+1)}$
8	$a_n=\frac{n!}{n^n}$	23	$a_n=\frac{(2n)!}{n^n}$
9	$a_n=\frac{1}{n^2}$	24	$a_n=\frac{3^n n!}{(n+1)^n}$
10	$a_n=\frac{1}{n^2+1}$	25	$a_n=\frac{n}{3^n(n+1)}$
11	$a_n=\frac{1}{5^n}$	26	$a_n=\frac{7^n}{\sqrt{n}}$
12	$a_n=\frac{2}{\sqrt{n}}$	27	$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Окончание таблицы 5

Номер варианта	Условие задачи	Номер варианта	Условие задачи
13	$a_n = \dfrac{3^n}{\sqrt[3]{n}}$	28	$a_n = \dfrac{n+1}{4^n\left(n+2\right)}$
14	$a_n = \dfrac{1}{2^n\sqrt{3n-1}}$	29	$a_n = \dfrac{n+2}{n\left(n+1\right)}$
15	$a_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{2n-1}}$	30	$a_n = \dfrac{1}{6^n}$

2.6 Разложить функцию $y = f\left(x\right)$ в ряд Фурье на промежутке $\left(-\pi;\pi\right)$ (таблица 6).

Таблица 6 – Данные для решения задания 6

Номер варианта	Условие задачи	Номер варианта	Условие задачи
1	$y = \begin{cases} 2, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 2 + x, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$	16	$y = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$
2	$y = \begin{cases} 2 - x, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 2, & x \in \left(0; \pi\right) \end{cases}$	17	$y = \begin{cases} 4x - 1, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 3, & x \in \left(0; \pi\right) \end{cases}$
3	$y = \begin{cases} -3x, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 1, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$	18	$y = \begin{cases} 4 - 3x, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 5, & x \in \left(0; \pi\right) \end{cases}$
4	$y = \begin{cases} 5, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 2x + 5, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$	19	$y = \begin{cases} 7 - \dfrac{x}{2}, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ \dfrac{3}{2}, & x \in \left(0; \pi\right) \end{cases}$
5	$y = \begin{cases} -1, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 3 - x, & x \in \left(0; \pi\right) \end{cases}$	20	$y = \begin{cases} 1, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 2x - 6, & x \in \left(0; \pi\right) \end{cases}$
6	$y = \begin{cases} 5 - 4x, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 5, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$	21	$y = \begin{cases} 6, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ \dfrac{x}{3} + 6, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$
7	$y = \begin{cases} 7, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 5x + 7, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$	22	$y = \begin{cases} 8, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ \dfrac{x}{2} + 8, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$
8	$y = \begin{cases} -5, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 2x - 5, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$	23	$y = \begin{cases} -x - 9, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ -9, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$
9	$y = \begin{cases} -4, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 3x - 4, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$	24	$y = \begin{cases} 2, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 2 + x, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$
10	$y = \begin{cases} 4x + 1, & x \in \left(-\pi; 0\right], \\ 1, & x \in \left(0; \pi\right) \end{cases}$	25	$y = \begin{cases} \dfrac{x}{7} + 1, & x \in \left(-\pi; 0\right), \\ 1, & x \in \left[0; \pi\right) \end{cases}$

Окончание таблицы 6

Номер варианта	Условие задачи	Номер варианта	Условие задачи
11	$y=\begin{cases}-x-8, & x\in(-\pi;0],\\ -8, & x\in(0;\pi)\end{cases}$	26	$y=\begin{cases}\frac{x}{8}+2, & x\in(-\pi;0),\\ 3, & x\in(0;\pi)\end{cases}$
12	$y=\begin{cases}2x, & x\in(-\pi;0),\\ 5, & x\in(0;\pi)\end{cases}$	27	$y=\begin{cases}5x-\frac{1}{2}, & x\in(-\pi;0),\\ -\frac{1}{2}, & x\in[0;\pi)\end{cases}$
13	$y=\begin{cases}\frac{x}{2}+1, & x\in(-\pi;0),\\ 2, & x\in(0;\pi)\end{cases}$	28	$y=\begin{cases}7-x, & x\in(-\pi;0),\\ 2, & x\in(0;\pi)\end{cases}$
14	$y=\begin{cases}\frac{x}{3}-2, & x\in(-\pi;0),\\ 1, & x\in(0;\pi)\end{cases}$	29	$y=\begin{cases}2-5x, & x\in(-\pi;0),\\ 3, & x\in(0;\pi)\end{cases}$
15	$y=\begin{cases}11-x, & x\in(-\pi;0],\\ 11, & x\in(0;\pi)\end{cases}$	30	$y=\begin{cases}4-x, & x\in(-\pi;0),\\ 4, & x\in[0;\pi)\end{cases}$

2.7 Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N (таблица 7).

Таблица 7 – Данные для решения задания 7

Номер варианта	Условие задачи	Номер варианта	Условие задачи
1	$\vec{F}=(x^2-2y)\vec{i}+(y^2-2x)\vec{j}$, L: отрезок MN, $M(-4;0)$, $N(0;2)$	16	$\vec{F}=\left(x+y\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{i}+\left(y-x\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{j}$, $L: x^2+y^2=1 \quad (y\ge 0)$ $M(1;0)$, $N(-1;0)$
2	$\vec{F}=(x^2+2y)\vec{i}+(y^2+2x)\vec{j}$, L: отрезок MN, $M(-4;0)$, $N(0;2)$	17	$\vec{F}=x^2y\vec{i}-yx^2\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=4 \quad (x\ge 0, y\ge 0)$, $M(2;0)$, $N(0;2)$
3	$\vec{F}=(x^2+2y)\vec{i}+(y^2+2x)\vec{j}$, $L:\ y=2-\frac{x^2}{8}$, $M(-4;0)$, $N(0;2)$	18	$\vec{F}=\left(x+y\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{i}+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=16 \quad (x\ge 0, y\ge 0)$, $M(4;0)$, $N(0;4)$
4	$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+2x\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=4 \quad (y\ge 0)$, $M(2;0)$, $N(-2;0)$	19	$\vec{F}=y^2\vec{i}-x^2\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=9 \quad (x\ge 0, y\ge 0)$, $M(3;0)$, $N(0;3)$
5	$\vec{F}=x^3\vec{i}-y^3\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=4 \quad (x\ge 0, y\ge 0)$, $M(2;0)$, $N(0;2)$	20	$\vec{F}=(x+y)^2\vec{i}-(x^2+y^2)\vec{j}$, L: отрезок MN, $M(1;0)$, $N(0;1)$
6	$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$, $L:\ y=x^2$, $M(-1;1)$, $N(1;1)$	21	$\vec{F}=(x^2+y^2)\vec{i}+y^2\vec{j}$, L: отрезок MN, $M(2;0)$, $N(0;2)$

Окончание таблицы 7

Номер варианта	Условие задачи	Номер варианта	Условие задачи
7	$\vec{F}=x^2y\vec{i}-y\vec{j}$, L: отрезок MN, $M(-1;0)$, $N(0;1)$	22	$\vec{F}=x^2\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=9\quad(x\ge 0, y\ge 0)$, $M(3;0)$, $N(0;3)$
8	$\vec{F}=(2xy-y)\vec{i}+(x^2+x)\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=9\quad(y\ge 0)$, $M(3;0)$, $N(-3;0)$	23	$\vec{F}=(y^2-y)\vec{i}+(2xy+x)\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=9\quad(y\ge 0)$, $M(3;0)$, $N(-3;0)$
9	$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$, $L:\ x^2+\dfrac{y^2}{9}=1\quad(x\ge 0, y\ge 0)$, $M(1;0)$, $N(0;3)$	24	$\vec{F}=xy\vec{i}$, $L: y=\sin x$, $M(\pi;0)$, $N(0;0)$
10	$\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=1\quad(y\ge 0)$, $M(1;0)$, $N(-1;0)$	25	$\vec{F}=(xy-y^2)\vec{i}+x\vec{j}$, $L: y=2x^2$, $M(0;0)$, $N(1;2)$
11	$\vec{F}=(x^2+y^2)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}$, $L: y=\begin{cases} x, 0\le x\le 1,\\ 2-x, 1\le x\le 2\end{cases}$ $M(2;0)$, $N(0;0)$	26	$\vec{F}=x^2y\vec{i}-y\vec{j}$, L: отрезок MN, $M(1;0)$, $N(0;3)$
12	$\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=2\quad(y\ge 0)$, $M(\sqrt{2};0)$, $N(-\sqrt{2};0)$	27	$\vec{F}=(xy-x)\vec{i}+\dfrac{x^2}{2}\vec{j}$, $L: y=2\sqrt{x}$, $M(0;0)$, $N(1;2)$
13	$\vec{F}=xy\vec{i}+2y\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=1\quad(x\ge 0, y\ge 0)$, $M(1;0)$, $N(0;1)$	28	$\vec{F}=-x\vec{i}+y\vec{j}$, $L:\ x^2+\dfrac{y^2}{9}=1\quad(x\ge 0, y\ge 0)$, $M(1;0)$, $N(0;3)$
14	$\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}$, $L: 2x^2+y^2=1\quad(y\ge 0)$ $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$, $N\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$	29	$\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j}$, $L: y=x^3$, $M(0;0)$, $N(2;8)$
15	$\vec{F}=(x^2+y^2)(\vec{i}+2\vec{j})$, $L: x^2+y^2=R^2\quad(y\ge 0)$ $M(R;0)$, $N(-R;0)$	30	$\vec{F}=(x-y)\vec{i}+\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=4\quad(y\ge 0)$, $M(2;0)$, $N(-2;0)$

2.8 С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (P) и координатными плоскостями (таблица 8).

Таблица 8 – Данные для решения задания 8

Номер варианта	Условие задачи
1	2
1	$\vec{a}(M)=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$, $(P): x+3y+z=3$
2	$\vec{a}(M)=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k}$, $(P): 2x-y-2z=2$
3	$\vec{a}(M)=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$, $(P): 3x+3y+z=3$
4	$\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k}$, $(P): x+y+z=2$
5	$\vec{a}(M)=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$, $(P): 2x+y+2z=2$
6	$\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$, $(P): x+2y+z=2$
7	$\vec{a}(M)=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$, $(P): 2x-3y+z=6$
8	$\vec{a}(M)=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$, $(P): x-y+z=2$
9	$\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$, $(P): 2x-y-2z=-2$
10	$\vec{a}(M)=(x+y-z)\vec{i}+-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, $(P): x+2y+z=2$
11	$\vec{a}(M)=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k}$, $(P): 2x+y+z=2$
12	$\vec{a}(M)=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k}$, $(P): x+2y+2z=2$
13	$\vec{a}(M)=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$, $(P): 3x+2y+2z=6$
14	$\vec{a}(M)=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$, $(P): 2x+y+z=4$
15	$\vec{a}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k}$, $(P): x+4y+2z=8$

Окончание таблицы 8

1	2
16	$\vec{a}(M) = 4z\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + (3y + z)\vec{k}$, $(P): x - 2y + 2z = 2$
17	$\vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + 2(x + z)\vec{k}$, $(P): 3x - 2y + 2z = 6$
18	$\vec{a}(M) = (x + y + z)\vec{i} + 2z\vec{j} + (y - 7z)\vec{k}$, $(P): 2x + 3y + z = 6$
19	$\vec{a}(M) = (2x - z)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + (x + 2z)\vec{k}$, $(P): x - y + z = 2$
20	$\vec{a}(M) = (2y - z)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + x\vec{k}$, $(P): x + 2y + 2z = 4$
21	$\vec{a}(M) = (2z - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (3x + z)\vec{k}$, $(P): x + y + 2z = 2$
22	$\vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} + y\vec{k}$, $(P): x + y + 2z = 2$
23	$\vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}$, $(P): 2x + 2y + z = 4$
24	$\vec{a}(M) = (3x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + y\vec{k}$, $(P): x + 2y + z = 2$
25	$\vec{a}(M) = (y + z)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (y + 3z)\vec{k}$, $(P): 2\,x + y + 3z = 6$
26	$\vec{a}(M) = (y + z)\vec{i} + (x + 6y)\vec{j} + y\vec{k}$, $(P): x + 2y + 2z = 2$
27	$\vec{a}(M) = (2y - z)\vec{i} + (2y + x)\vec{j} + y\vec{k}$, $(P): x + 3y + 2z = 6$
28	$\vec{a}(M) = (y + z)\vec{i} + x\vec{j} + (y - 2z)\vec{k}$, $(P): 2x + 2y + z = 2$
29	$\vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}$, $(P): 3x + 2y + z = 6$
30	$\vec{a}(M) = z\vec{i} + (y + x)\vec{j} + y\vec{k}$, $(P): 2x + y + 2z = 2$

Вопросы по программе курса

Тема 1. ***Обыкновенные дифференциальные уравнения***

Определение дифференциального уравнения (ДУ), решение, график, интегрирование. ДУ 1-го порядка: геометрическая интерпретация (изоклины). Нормальные ДУ 1-го порядка: определение, решения. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши, особые решения.

Тема 2. ***Дифференциальные уравнения первого порядка***

ДУ первого порядка с разделёнными и разделяющимися переменными; их интегрирование. Однородные ДУ 1-го порядка, их интегрирование. Линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ) 1-го порядка и их интегрирование методами Бернулли-Фурье (подстановки), Лагранжа (вариации произвольных постоянных)

Тема 3. ***Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений***

Общие понятия о ДУ высших порядков. Задача Коши. Понятие общего и частного решений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Понятие о краевых задачах. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Однородные и неоднородные линейные ДУ высших порядков. Линейный дифференциальный оператор и его свойства. Свойства решений ЛОДУ n-го порядка. Линейная независимость функций. Определитель Вронского. Условия линейной независимости решений ДУ n-го порядка. (ЛОДУ). Структура общего решения ЛОДУ n-го порядка.

Линейные однородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Характеристические уравнения, частные и общие решения ЛОДУ, их интегрирование методом Эйлера.

Линейные НДУ с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью, их решение методом неопределенных коэффициентов.

ЛНДУ с постоянными коэффициентами, их интегрирование методом вариаций произвольных постоянных (метод Лагранжа). Однородные и неоднородные системы ЛДУ с постоянными коэффициентами, их интегрирование методом Эйлера и методом исключений.

Тема 4. ***Числовые ряды***

Числовой ряд и его сумма. Свойства сходящихся рядов, геометрическая прогрессия. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд. Действия над рядами.

Достаточные условия сходимости числового ряда: признаки сравнения; признаки Даламбера и Коши; интегральный признак Коши. Обобщенный гармонический ряд.

Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов.

Тема 5. ***Функциональные и степенные ряды***

Функциональные ряды, сумма ряда и область сходимости, методы ее определения. Непрерывность суммы функционального ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование функционального ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда. Ряды Тейлора, условия представления функции рядом Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

Тема 6. ***Тригонометрические ряды Фурье***

Ортогональность тригонометрической системы функций. Тригонометрический ряд Фурье. Достаточные условия сходимости тригонометрических рядов Фурье. Ряд Фурье для функций с периодом 2π. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на отрезке $[0, \pi]$. Ряд Фурье для функции с произвольным периодом.

Тема 7. ***Криволинейные интегралы (КРИ)***

Криволинейные интегралы I и II рода: основные понятия, свойства. Вычисление криволинейных интегралов I и II рода. Связь КРИ-1 и КРИ-2. Формула Остроградского–Грина. Условия независимости КРИ-2 от пути интегрирования. Поверхностные интегралы I и II рода: основные понятия, свойства. Вычисление поверхностных интегралов I и II рода. Приложения поверхностных интегралов. Формула Остроградского-Гаусса.

Список литературы

1 **Бугров, Я. С.** Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1981. – 230 с.

2 **Герасимович, А. И.** Математический анализ / А. И. Герасимович, Н. П. Кеда, М. Б. Сугак. – Минск : Выш. шк., 1990. – 198 с.

3 **Мышкис, А. Д.** Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. – М. : Наука, 1969. – 453 с.

4 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т.2. – 286 с.

5 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – М. : Высш. шк., 1973. – 576 с.

6 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / Под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 1991. – Ч. 2–3.

7 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Ч. 2–3.